

И.И.Ляшко, А.К.Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П.Головач
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ:
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ

Справочное пособие по высшей математике. Т. 3

М.: Едиториал УРСС, 2001. — 224 с.

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 3 по содержанию соответствует второй половине второго тома «Справочного пособия по математическому анализу». В нем рассматриваются интегралы, зависящие от параметра, кратные и криволинейные интегралы, а также элементы векторного анализа.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.

Оглавление

Глава 1. Интегралы, зависящие от параметра	3
§1. Собственные интегралы, зависящие от параметра	3
§2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимост ь интегралов	15
§3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла	34
§4. Эйлеровы интегралы	51
§5. Интегральная формула Фурье	60
Глава 2. Кратные и криволинейные интегралы	68
§1. Интеграл Римана на компакте. Приведение кратных интегралов к повторным и их вычисление	68
§2. Несобственные кратные интегралы	99
§3. Приложение кратных интегралов к решению задач геометрии и физики	112
§4. Интегрирование на многообразиях	148
§5. Формулы Остроградского, Грина и Стокса	184
§6. Элементы векторного анализа	201
§7. Запись основных дифференциальных операций векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах	214
Ответы	222

Интегралы, зависящие от параметра

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1.1. Непрерывность функции

$$F: y \mapsto \int_a^A f(x, y) dx. \quad (1)$$

Теорема 1. Если функция $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}$, где $\Pi = \{(x, y) \mid a \leq x \leq A, b \leq y \leq B\}$, непрерывна, то функция F непрерывна на отрезке $[b, B]$.

Теорема 2. Если функция f непрерывна на Π , а кривые $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, $y \in [b, B]$, непрерывны и не выходят за его пределы, то функция

$$I: y \mapsto \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \quad (2)$$

непрерывна на отрезке $[b, B]$.

1.2. Предельный переход под знаком интеграла.

Теорема 1. При условиях теорем п.1.1 справедливы формулы

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^A f(x, y) dx &= \int_a^A \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx, \\ \lim_{y \rightarrow y_0} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx &= \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0) dx. \end{aligned}$$

Определение. Семейство функций $x \mapsto f(x, y)$, где y — параметр семейства, $y \in Y$, равномерно стремится к предельной функции g при $y \rightarrow y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что при $0 < |y - y_0| < \delta$ будет $|f(x, y) - g(x)| < \varepsilon$ для всех тех x , для которых функции f и g определены.

Если $y_0 = \infty$, то неравенства $0 < |y - y_0| < \delta$ следует заменить неравенством $|y| > \delta$; если же $y_0 = +\infty(-\infty)$, то тогда неравенством $y > \delta (y < -\delta)$.

Теорема 2. Если функция f при фиксированном $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a, A]$ и при $y \rightarrow y_0$ стремится к предельной функции g равномерно относительно x , то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A g(x) dx.$$

1.3. Дифференцирование под знаком интеграла.

Теорема 1. Если функции f и f'_y непрерывны на Π , то функция F дифференцируема на отрезке $[b, B]$ и ее производную можно найти по формуле Лейбница

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A f'_y(x, y) dx.$$

Теорема 2. Если, кроме условий теоремы 2, п.1.1, функции φ и ψ дифференцируемы при $b < y < B$, то

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx, \quad y \in]b, B[.$$

1.4. Интегрирование под знаком интеграла.

Теорема. Если функция f непрерывна на Π , то

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

1. Исследовать на непрерывность функцию

$$F: y \mapsto \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx,$$

где $f \in C[0, 1]$ и $f(x) > 0$.

◀ Функции $\varphi: x \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2}$ и f интегрируемы по x на $[0, 1]$ и знакопостоянны при $0 < x < 1$. Кроме того, функция f непрерывна; следовательно, все условия первой теоремы о среднем в интегральном исчислении выполнены, поэтому

$$F(y) = f(c(y)) \operatorname{arctg} \frac{1}{y}, \quad 0 \leq c(y) \leq 1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|F(\varepsilon) - F(-\varepsilon)| = \left| (f(c(\varepsilon)) + f(c(-\varepsilon))) \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon} \right| \geq 2 \min_{x \in [0, 1]} f(x) \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon} \right| \rightarrow \pi \min_{x \in [0, 1]} f(x) > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, функция F разрывна в нуле.

Далее, поскольку функция $\psi: (x, y) \mapsto \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}$ непрерывна в каждом из прямоугольников $[0 \leq x \leq 1; \delta \leq y \leq A]$, $[0 \leq x \leq 1; -A \leq y \leq -\delta]$, где $\delta > 0$, $A > 0$, то, согласно теореме 1, п.1.1, функция F непрерывна на каждом из отрезков $[\delta, A]$ и $[-A, -\delta]$. Поскольку δ и A произвольны, то отсюда следует, что функция F непрерывна $\forall y \neq 0$. ▶

$$2. \text{ Найти: а) } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx; \text{ б) } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2};$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}; \text{ г) } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x + |\alpha|)}{\ln(x^2 + \alpha^2)} dx.$$

◀ Поскольку функции $(x, \alpha) \mapsto \sqrt{x^2 + \alpha^2}$, $\alpha \mapsto 1 + \alpha$, $(x, \alpha) \mapsto \frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ непрерывны, то, согласно теореме 1, п.1.2, возможен предельный переход по α под знаком интеграла, когда $\alpha \rightarrow \alpha_0$ и α_0 — конечное.

$$a) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2} dx = \int_{-1}^1 |x| dx = 1;$$

$$б) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \alpha_0 = 0.$$

Поскольку функции $x \mapsto \frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ и $x \mapsto \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}$ при фиксированных $n, n \in \mathbb{N}$ и $\alpha, |\alpha| > 1$, непрерывны по x ($0 \leq x \leq 1$ и $1 \leq x \leq 2$ соответственно) и $f_n(x) = \frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} \Rightarrow \frac{1}{1+e^x}$, когда $n \rightarrow \infty$, а $f(x, \alpha) = \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)} \Rightarrow \frac{1}{2}$, когда $\alpha \rightarrow \infty$ (см. ниже), то, согласно теореме 2, п.1.2, получаем:

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \ln \frac{2e}{e+1};$$

$$г) \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)} dx = \int_1^2 \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)} dx = \frac{1}{2}.$$

Равномерная сходимость последовательности $(f_n(x))$ и семейства функций $x \mapsto f(x, \alpha)$ вытекает из следующих оценок:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} - \frac{1}{1+e^x} \right| &= \frac{\left| e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \right|}{(1+e^x)\left(1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} \leq \left| e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \right| \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \right| = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty \forall x \in [0, 1]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{\ln\left(1+\frac{2x|\alpha|}{x^2+\alpha^2}\right)}{2\ln(x^2+\alpha^2)} \right| \leq \frac{x|\alpha|}{(x^2+\alpha^2)\ln(x^2+\alpha^2)} \leq \\ &\leq \frac{2|\alpha|}{(1+\alpha^2)\ln(1+\alpha^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+\alpha^2)} < \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall x \in [1, 2]$, как только $|\alpha| > \left(e^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$. ►

$$3. \text{ Найти } A = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta.$$

◀ Поскольку $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, то $e^{-R \sin \theta} \leq e^{-\frac{2}{\pi} R \theta}$. Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R \theta} d\theta = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R})$$

и $0 \leq A \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) = 0$, т. е. $A = 0$. ►

4. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[A, B]$. Доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x (f(t+h) - f(t)) dt = f(x) - f(a), \quad A < a < x < B.$$

◀ Вводя в рассмотрение первообразную F функции f , согласно формуле Ньютона—Лейбница, получаем

$$\int_a^x (F'(t+h) - F'(t)) dt = (F(t+h) - F(t)) \Big|_a^x = F(x+h) - F(x) - (F(a+h) - F(a)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x (f(t+h) - f(t)) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \\ &= F'(x) - F'(a) = f(x) - f(a). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

5. Пусть: 1) $\varphi_n(x) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, на $[-1, 1]$; 2) $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, если $0 < \varepsilon \leq |x| \leq 1$;

3) $\int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что если $f \in C[-1, 1]$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(x) dx = f(0).$$

◀ Пусть $\delta > 0$ задано. Рассмотрим неравенство

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(x) dx - f(0) \right| \leq \left| \int_{-1}^{-\varepsilon} f(x) \varphi_n(x) dx + \int_{\varepsilon}^1 f(x) \varphi_n(x) dx \right| + \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) \varphi_n(x) dx - f(0) \right|. \quad (1)$$

Первое слагаемое в правой части (1) оценивается следующим образом:

$$\left| \int_{-1}^{-\varepsilon} f(x) \varphi_n(x) dx + \int_{\varepsilon}^1 f(x) \varphi_n(x) dx \right| \leq 2M \sup_{0 < \varepsilon \leq |x| \leq 1} \varphi_n(x), \quad (2)$$

где $M = \max_{|x| \leq 1} |f(x)| \neq 0$ (заметим, что при $f(x) \equiv 0$ на $[-1, 1]$ утверждение теоремы становится тривиальным).

Пользуясь первой теоремой о среднем, а также условием 1), оцениваем второе слагаемое в правой части неравенства (1):

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) \varphi_n(x) dx - f(0) \right| &= \left| f(\xi_n) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_n(x) dx - f(0) \right| \leq \\ &\leq |f(\xi_n) - f(0)| \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx + M \left| 1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_n(x) dx \right| \leq \\ &\leq |f(\xi_n) - f(0)| \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx + M \left| 1 - \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx \right| + 2M \sup_{0 < \varepsilon \leq |x| \leq 1} \varphi_n(x), \quad (3) \end{aligned}$$

где $|\xi_n| < \varepsilon$.

В силу непрерывности функции f , всегда можно выбрать число ε так, что будет выполняться неравенство

$$|f(\xi_n) - f(0)| < \frac{\delta M}{4M + \delta}. \quad (4)$$

После того как число ε уже выбрано, из условий 2) и 3) находим

$$0 < \sup_{0 < \varepsilon \leq |x| \leq 1} \varphi_n(x) < \frac{\delta}{8M}, \quad \left| \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx - 1 \right| < \frac{\delta}{4M}, \quad 0 < \int_{-1}^1 \varphi_n(x) dx < 1 + \frac{\delta}{4M}, \quad (5)$$

если n достаточно велико.

Используя теперь оценки (2)–(5), из (1) получаем

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) \varphi_n(x) dx - f(0) \right| < \delta$$

при всех достаточно больших n . ►

6. Можно ли совершить предельный переход под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx?$$

◄ Нет, нельзя. Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем нуль. Если же вычислить интеграл, а затем перейти к пределу, то получим

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}} d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \left(1 - e^{-\frac{1}{y^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отметим, что в точке $(0, 0)$ функция $f: (x, y) \mapsto \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$ терпит разрыв. ►

7. Найти $F'(\alpha)$, если: а) $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha) dx$; б) $F(\alpha) = \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2) dy$.

◄ а) Допуская существование непрерывных частных производных функций $(u, v) \mapsto f(u, v)$, где $u = x + \alpha$, $v = x - \alpha$, согласно формуле Лейбница, имеем

$$F'(\alpha) = f(2\alpha, 0) + \int_0^\alpha (f'_u(u, v) - f'_v(u, v)) dx.$$

Замечая, что $\frac{df}{dx} = f'_u + f'_v$, можем записать

$$\int_0^\alpha (f'_u - f'_v) dx = 2 \int_0^\alpha f'_u dx - f(2\alpha, 0) + f(\alpha, -\alpha).$$

Следовательно, $F'(\alpha) = f(\alpha, -\alpha) + 2 \int_0^\alpha f'_u dx$.

б) Обозначим $f(x, \alpha) = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2) dy$. Тогда

$$F'(\alpha) = 2f(\alpha^2, \alpha) + \int_0^{\alpha^2} f'_\alpha(x, \alpha) dx,$$

$$f'_\alpha(x, \alpha) = \sin(x^2 + (x+\alpha)^2 - \alpha^2) + \sin(x^2 + (x-\alpha)^2 - \alpha^2) -$$

$$- 2\alpha \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy.$$

Таким образом, получаем

$$F'(\alpha) = 2\alpha \int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin(y^2 + \alpha^4 - \alpha^2) dy + 2 \int_0^{\alpha^2} \sin 2x^2 \cos 2\alpha x dx - 2\alpha \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy. \blacktriangleright$$

8. Найти $F''(x)$, если $F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta$, $h > 0$, где f — непрерывная функция.

◀ Очевидно, если функция f непрерывна, то справедливо равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t + \omega) dt = \int_{\alpha+\omega}^{\beta+\omega} f(t) dt.$$

Пользуясь этим равенством и возможностью дифференцирования по параметру, получаем

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_{x+\xi}^{h+x+\xi} f(\eta) d\eta \right) = \frac{1}{h^2} \int_0^h (f(h+x+\xi) - f(x+\xi)) d\xi = \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\int_{x+h}^{x+2h} f(\xi) d\xi - \int_x^{x+h} f(\xi) d\xi \right), \\ F''(x) &= \frac{1}{h^2} (f(2h+x) - 2f(h+x) + f(x)). \blacktriangleright \end{aligned}$$

9. Доказать формулу

$$I_n = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \psi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad \psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos\left(y + \frac{n\pi}{2}\right) dy, & x \neq 0, \\ \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1}, & x = 0, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Пользуясь формулой (1), получить оценку $\left| \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right| \leq \frac{1}{n+1}$ при $x \in]-\infty, +\infty[$.

◀ Справедливость формулы (1) при $x \neq 0$ устанавливается методом математической индукции. Действительно, при $n = 1$ соотношение (1) справедливо. Предполагая, что формула (1) правильна при некотором $n = k$, дифференцированием обеих ее частей по x с последующим применением интегрирования по частям получаем

$$I_{k+1} = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{x} \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) - \frac{k+1}{x^{k+2}} \int_0^x y^k \cos\left(y + \frac{k\pi}{2}\right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} \cos \left(x + \frac{k\pi}{2} \right) - \frac{k+1}{x^{k+2}} \left(\frac{y^{k+1}}{k+1} \cos \left(y + \frac{k\pi}{2} \right) \right) \Big|_0^x + \frac{1}{k+1} \int_0^x y^{k+1} \sin \left(y + \frac{k\pi}{2} \right) dy = \\
&= -\frac{1}{x^{k+2}} \int_0^x y^{k+1} \sin \left(y + \frac{k\pi}{2} \right) dy = \frac{1}{x^{k+2}} \int_0^x y^{k+1} \cos \left(y + \frac{(k+1)\pi}{2} \right) dy, \quad x \neq 0.
\end{aligned}$$

Покажем теперь справедливость формулы (1) при $x = 0$. Используя разложение $\sin x$ в ряд Маклорена, получаем $\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$, если $x \neq 0$. Очевидно, сумма этого ряда при $x = 0$ равна единице. Поэтому $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$ при всех x . Отсюда находим $f^{(n)}(0) = \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1}$, что и требовалось доказать.

Далее, поскольку при $x \neq 0$

$$\left| \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos \left(y + \frac{n\pi}{2} \right) dy \right| \leq \frac{1}{|x|^{n+1}} \int_0^{|x|} y^n dy = \frac{1}{n+1},$$

а при $x = 0$ имеем $|f^{(n)}(0)| = \frac{|\cos \frac{n\pi}{2}|}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, то $\forall x \in]-\infty, +\infty[$

$$\left| \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right| \leq \frac{1}{n+1}. \blacktriangleright$$

10. Функцию $f: x \mapsto x^2$ на отрезке $[1, 3]$ приближенно заменить линейной функцией $x \mapsto a + bx$ так, чтобы

$$I(a, b) = \int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx = \min.$$

◀ Поскольку подынтегральная функция имеет непрерывные частные производные при любых a и b , то можно применять формулу Лейбница. Дифференцируя под знаком интеграла по a и по b и учитывая необходимые условия экстремума функции I , получаем

$$I'_a(a, b) = 2 \int_1^3 (a + bx - x^2) dx = 0, \quad I'_b(a, b) = 2 \int_1^3 (a + bx - x^2)x dx = 0.$$

Отсюда находим $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$. Легко убедиться, что $I''_{aa}(a, b) = 4$. Таким образом,

$$d^2 I(a, b) = 4 da^2 + 16 da db + \frac{52}{3} db^2 = 4(da + 2db)^2 + \frac{4}{3} db^2 > 0,$$

т. е. при $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$ функция I принимает минимальное значение. Следовательно, линейная функция $y = 4x - \frac{11}{3}$ удовлетворяет поставленной задаче. ▶

11. Найти производные от полных эллиптических интегралов

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad 0 < k < 1,$$

и выразить их через функции E и F .

Показать, что $E(k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

◀ Будем считать, что $k \in [k_0, k_1] \subset]0, 1[$. Тогда функции $(k, \varphi) \mapsto \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}$, $(k, \varphi) \mapsto \frac{k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(\varphi, k) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, k_0 \leq k \leq k_1\}$. Следовательно, к интегралу применима формула Лейбница. Имеем

$$E'(k) = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (1)$$

Умножая обе части этого равенства на k и пользуясь выражениями для $E(k)$ и $F(k)$, находим

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k) - F(k)}{k}. \quad (2)$$

Интегрируя в (1) по частям, получаем

$$E'(k) = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \varphi d(\cos \varphi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cos^2 \varphi d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} + k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Но поскольку

$$F'(k) = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad (kF(k))' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

(дифференцирование здесь возможно по причине, аналогичной изложенной выше), то $E'(k) = F'(k) = -(kF(k))'$. Пользуясь формулой (2), из последнего соотношения находим

$$F'(k) = \frac{E(k)}{k(1-k)} - \frac{F(k)}{k}. \quad (3)$$

Из формулы (2) следует, что $F(k) = E(k) - kE'(k)$, $F' = -kE''$. Подставляя $F(k)$ и $F'(k)$ в (3), приходим к указанному дифференциальному уравнению.

Наконец, так как числа k_0 и k_1 могут быть как угодно близкими к нулю и единице соответственно, то отсюда следует, что все полученные выше результаты справедливы при $0 < k < 1$. ▶

12. Доказать, что функция Бесселя

$$I_n : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) + (x^2 - n^2) I_n(x) = 0.$$

◀ Вычисляя производную от данного интеграла и интегрируя по частям, находим

$$I_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\varphi - x \sin \varphi) d(\cos \varphi) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \varphi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi - \frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 \varphi) \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi = \\
&= \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \varphi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi - x I_n(x) - x I_n''(x). \quad (1)
\end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi)(n - x \cos \varphi) d\varphi = 0$, то

$$\frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi = n I_n(x). \quad (2)$$

Умножая обе части соотношения (1) на x и учитывая тождество (2), получаем уравнение Бесселя. ►

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

$$13. I(a) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

◀ Пусть $||a| - 1| \geq \epsilon > 0$. Тогда функции $f : (a, x) \mapsto \ln(1 - 2a \cos x + a^2)$, $f'_a : (a, x) \mapsto \frac{2(a - \cos x)}{1 - 2a \cos x + a^2}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(\epsilon, x) \mid ||a| - 1| \geq \epsilon > 0, 0 \leq x \leq \pi\}$ и, в соответствии с теоремой 1, п.1.3, возможно дифференцирование по параметру a под знаком интеграла. Имеем

$$I'(a) = 2 \int_0^{\pi} \frac{a - \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx.$$

Используя подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, приводим интеграл к виду

$$I'(a) = 4 \int_0^{+\infty} \frac{a - 1 + (a + 1)t^2}{(1 + t^2)((1 - a)^2 + (1 + a)^2 t^2)} dt.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов и формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$I'(a) = \begin{cases} \frac{2\pi}{a}, & \text{если } |a| \geq 1 + \epsilon, \\ 0, & \text{если } |a| \leq 1 - \epsilon. \end{cases}$$

Отсюда

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi \ln |a| + C_1, & \text{если } |a| \geq 1 + \epsilon, \\ C_2, & \text{если } |a| \leq 1 - \epsilon, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Поскольку полученный результат справедлив при сколь угодно малом $\epsilon > 0$, то

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi \ln |a| + C_1, & \text{если } |a| > 1, \\ C_2, & \text{если } |a| < 1. \end{cases} \quad (1)$$

Для вычисления $I(\pm 1)$ используем исходный интеграл:

$$I(\pm 1) = \int_0^{\pi} \ln(2(1 \pm \cos x)) dx = 2\pi \ln 2 + 4 \int_0^{\pi} \ln \sin t dt = 0. \quad (2)$$

Поскольку $I(0) = 0$, то $C_2 = 0$. Кроме того, как видим из (1), $\lim_{|a| \rightarrow 1-0} I(a) = 0$. Следовательно, с учетом тождества (2) находим, что функция I непрерывна в точках $a = 1$, $a = -1$ соответственно слева и справа.

Замечая, что

$$I\left(\frac{1}{a}\right) = \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{1}{a^2}(a^2 - 2a \cos x + 1)\right) dx = -2\pi \ln |a| + I(a), \quad a \neq 0, \quad (3)$$

приходим к выводу, что функция I непрерывна в указанных точках также справа и слева. Действительно, в этом случае из соотношения (3) находим

$$\lim_{|a| \rightarrow 1+0} I(a) = 2\pi \lim_{|a| \rightarrow 1+0} \ln |a| + \lim_{|a| \rightarrow 1+0} I\left(\frac{1}{a}\right) = \lim_{|a| \rightarrow 1-0} I(a) = 0.$$

Таким образом, функция I непрерывна при всех a . Поэтому, полагая $C_1 = 0$, имеем

$$I(a) = \begin{cases} 2\pi \ln |a|, & \text{если } |a| > 1, \\ 0, & \text{если } |a| \leq 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

$$14. \quad I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

◀ Пусть $a \geq \varepsilon > 0$. Тогда функции

$$f : (x, a) \mapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}, & x \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = 0, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad f'_a : (x, a) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(x, \varepsilon) \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, a \geq \varepsilon > 0\}$. Поэтому, согласно теореме 1, п.1.3, при $a \geq \varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2 t^2)} = \frac{\pi}{2(1+a)};$$

из которого интегрированием находим

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + C, \quad (1)$$

где C — произвольная постоянная.

Поскольку $\varepsilon > 0$ может быть произвольно мало, то полученный результат справедлив при всяком $a > 0$. Тогда из (1) следует, что

$$C = \lim_{a \rightarrow +0} I(a). \quad (2)$$

Таким образом, если исходный интеграл представляет собой непрерывную функцию параметра a , то, с учетом (2), имеем $C = I(0)$. Но интеграл действительно непрерывен по a в силу теоремы 1, п.1.1. Следовательно, $C = 0$ и $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)$ при $a \geq 0$.

Учитывая еще очевидное равенство $I(a) = I(|a|) \operatorname{sgn} a$, окончательно находим $I(a) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \cdot \ln(1+|a|) \forall a$. ▶

$$15. \quad I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \frac{dx}{\cos x}; \quad |a| < 1.$$

◀ Функции

$$f : (x, a) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x}, & x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 2a, & x = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad f'_a : (x, a) \mapsto \frac{1}{1-a^2 \cos^2 x}$$

непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(\epsilon, x) \mid |a| \leq 1 - \epsilon < 1, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$. Поэтому, в соответствии с п.1.3,

$$I'(a) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2 \cos^2 x} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1-a^2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}},$$

откуда $I(a) = \pi \arcsin a + C$.

Устремляя ϵ к нулю, замечаем, что этот ответ правилен при $|a| < 1$. Так как $I(0) = 0$, то $C = 0$. Таким образом, $I(a) = \pi \arcsin a$. ▶

16. Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}, \quad x \neq 0, \quad (1)$$

вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2)$$

◀ Интеграл (2) является несобственным, поэтому его следует понимать как предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Подставляя сюда интеграл (1), получаем

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}. \quad (3)$$

Так как функция $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{(1+x^2 y^2)\sqrt{1-x^2}}$ является непрерывной на прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 - \epsilon, 0 \leq y \leq 1\}$, то из (3), используя теорему п.1.4, находим

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^1 dy \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(1+x^2 y^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Сделав в интеграле $A = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2 y^2)}$, $|x| < 1$, подстановку $t = \arcsin x$, получаем

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \left(z \sqrt{1+y^2} \right), \quad z = \operatorname{tg}(\arcsin x).$$

Следовательно,

$$B(\epsilon, y) = A|_0^{1-\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1+y^2} \operatorname{tg}(\arcsin(1-\epsilon)) \right).$$

Поскольку функция B при $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ является непрерывной (при $\varepsilon = 0$ полагаем $B(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} B(\varepsilon, y)$), то в соответствии с теоремой 1, п.1.2, имеем

$$I = \int_0^1 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} B(\varepsilon, y) dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}). \blacktriangleright$$

17. Вычислить интегралы:

$$I_1 = \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx; \quad I_2 = \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

◀ Используя представление (1) из предыдущего примера, вместо данных интегралов рассматриваем повторные:

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_a^b x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dy; \quad I_2 = \int_0^1 dx \int_a^b x^y \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) dy.$$

Функции

$$f_1 : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right), & 0 < x \leq 1, \quad a \leq y \leq b, \\ 0, & x = 0, \quad a \leq y \leq b, \end{cases}$$

$$f_2 : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^y \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right), & 0 < x \leq 1, \quad a \leq y \leq b, \\ 0, & x = 0, \quad a \leq y \leq b, \end{cases}$$

непрерывны, поэтому можно выполнить перестановку интегралов:

$$I_1 = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx, \quad I_2 = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx.$$

Произведя подстановку $x = e^{-t}$, получаем

$$I_1 = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \sin t dt, \quad I_2 = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \cos t dt,$$

Выполняя внутреннее интегрирование, находим

$$I_1 = \int_a^b \frac{dy}{(y+1)^2 + 1}, \quad I_2 = \int_a^b \frac{(y+1) dy}{(y+1)^2 + 1},$$

откуда

$$I_1 = \operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2}. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Доказать, что функция $F : y \mapsto \int_a^b \varphi(x) f(x, y) dx$ является непрерывной на $[c, d]$, если выполнены условия:

- 1) функция f непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$;
- 2) функция φ абсолютно интегрируема на интервале $[a, b]$.

Исследовать на непрерывность следующие функции:

$$2. F: y \mapsto \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}(x^2+y^2+1)}. \quad 3. F: y \mapsto \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y^2 dx}{(x+|y|)\sqrt{\operatorname{tg} \frac{y}{2}}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

$$4. F: y \mapsto \begin{cases} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{\frac{1}{3}} dx}{\operatorname{arctg}(x^2+y^2) \sin x}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Найти пределы:

$$5. \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x+y) dx}{x^2 y^2 + xy + 1}. \quad 6. \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^2 \frac{y}{y+x} e^{-x^2 y} dx.$$

$$7. \lim_{y \rightarrow 0} \int_{y^2}^{y^2+1} \frac{\arcsin x dx}{xy + (1+y^2) \frac{1}{y^2}}. \quad 8. \lim_{y \rightarrow 0} \int_{[y]}^{\operatorname{sgn} y} \frac{\sin(xy)}{(x+y)y+1} dx.$$

Доказать, что в следующих случаях возможен предельный переход под знаком интеграла:

$$9. \int_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x+y^2}} dx, \quad y \rightarrow +\infty. \quad 10. \int_{-1}^3 \operatorname{arctg} \left(\frac{xy}{1+y} \right) dx, \quad y \rightarrow 0.$$

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x} \sin \frac{x^2}{y} dx, \quad y \rightarrow \infty. \quad 12. \int_0^1 \frac{\arccos \frac{(x+y) dx}{x+y+2}}{x+y+2}, \quad y \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

13. Пусть: 1) функция $\psi: (x, y) \mapsto \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$;

2) функция φ абсолютно интегрируема на $]a, b[$. Тогда функция $F: y \mapsto \int_a^b \varphi(x) f(x, y) dx$ непрерывно дифференцируема на $]c, d[$. Доказать это.

Исследовать на непрерывную дифференцируемость функцию F и возможность дифференцирования по параметру под знаком интеграла, если:

$$14. F: y \mapsto \int_0^2 \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx. \quad 15. F: y \mapsto \int_{-1}^1 \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^2 + |y| + 2}.$$

Доказать, что в следующих повторных интегралах можно изменить порядок интегрирования:

$$16. \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\cos(xy)}{x+y} dx. \quad 17. \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^1 \frac{\operatorname{tg}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dx.$$

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов

2.1. Определение равномерной сходимости.

Пусть несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad (1)$$

где функция f определена в области $\Pi = \{(x, y) \mid a \leq x < +\infty, y_1 < y < y_2\}$, сходится на интервале $]y_1, y_2[$. Говорят, что интеграл (1) равномерно сходится на $]y_1, y_2[$, если $\forall \epsilon > 0$

$\exists B > a$ такое, что $\forall b > B \wedge \forall y \in]y_1, y_2[$ выполняется неравенство

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

2.2. Критерий Коши.

Для того чтобы интеграл (1), п.2.1, сходиллся равномерно на $]y_1, y_2[$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists A > a$ такое, что $\forall \alpha > A \wedge \forall \beta > A \wedge \forall y \in]y_1, y_2[$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

2.3. Признак Вейерштрасса.

Несобственный интеграл (1), п.2.1, сходится абсолютно и равномерно на $]y_1, y_2[$, если $\exists F :]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $|f(x, y)| \leq F(x) \forall x \in]a, +\infty[\wedge \forall y \in]y_1, y_2[$ и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ сходится. Функция F называется *мажорирующей* по отношению к функции f .

2.4. Предельный переход под знаком интеграла.

Теорема 1. Если 1) функция $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна по переменной x и при $y \rightarrow y_0 \in]y_1, y_2[$ равномерно относительно x стремится к предельной функции g на каждом отрезке $[a, A]$; 2) интеграл (1), п.2.1, сходится равномерно на $]y_1, y_2[$, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Теорема 2. Если функция f непрерывна при $a \leq x < +\infty, y_1 \leq y \leq y_2$ и интеграл (1), п.2.1, сходится равномерно на $]y_1, y_2[$, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0 \in]y_1, y_2[} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx.$$

2.5. Непрерывность несобственного интеграла.

Теорема 1. Если функция f непрерывна в области $a \leq x < +\infty, y_1 \leq y \leq y_2$ и интеграл (1), п.2.1, сходится равномерно на отрезке $[y_1, y_2]$, то он представляет собой значение непрерывной функции на этом отрезке.

Теорема 2. Если: 1) функция f непрерывна и ограничена в указанной области; 2) функция φ интегрируема на каждом отрезке $a \leq x \leq A$; 3) интеграл $\int_a^{+\infty} |\varphi(x)| dx$ сходится, то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \varphi(x) dx$$

сходится равномерно и является значением равномерно-непрерывной функции параметра y на отрезке $[y_1, y_2]$.

Аналогичные определение и теоремы справедливы и для интегралов от неограниченных функций.

Определить области сходимости интегралов:

$$18. \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx.$$

◀ Положим для определенности, что $p \geq q$. Функция

$$x \mapsto \int_{\pi}^x \cos t \, dt = \sin x$$

ограничена. Функция $x \mapsto \frac{1}{x^{p-1}}$ монотонно стремится к нулю при $p > 1$. Следовательно, интеграл

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} dx,$$

в силу признака Дирихле, сходится при $p > 1$. Так как функция $x \mapsto \frac{1}{1+x^{q-p}}$ монотонна и ограничена при $x > \pi$, то интеграл

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} \cdot \frac{dx}{1+x^{q-p}}$$

по признаку Абеля, сходится при $p > 1$, т. е. при $\max(p, q) > 1$.

Это условие является и необходимым. Действительно, представляя интеграл в виде ряда и пользуясь теоремой о среднем, получаем

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1} + x^{q-1}} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2}(2n+1)}^{\frac{\pi}{2}(2n+3)} \frac{\cos x \, dx}{x^{p-1} + x^{q-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\xi_n^{p-1} + \xi_n^{q-1}}, \quad \frac{\pi}{2}(2n+1) \leq \xi_n < \frac{\pi}{2}(2n+3).$$

Из необходимого условия сходимости ряда вытекает неравенство $\max(p, q) > 1$, что и требовалось доказать. ▶

$$19. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx.$$

◀ Произведем замену переменной x по формуле $x = t^{\frac{1}{q}}$, $t > 0$, $q > 0$, и разобьем полученный интеграл на два интеграла. Тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx = \frac{1}{q} \int_0^a \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt + \frac{1}{q} \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt, \quad \alpha = \frac{p-1}{q} + 1, \quad a > 0.$$

Так как $\frac{\sin t}{t^{\alpha}} = O^*\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)$ при $t \rightarrow +0$, то первый интеграл, в силу признака сравнения, сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geq 2$. Второй интеграл, в силу признака Дирихле, сходится при $\alpha < 2$. При $\alpha \leq 0$ этот интеграл расходится, так как при этом условии расходится соответствующий числовой ряд. Действительно, поскольку

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin t|}{t} dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\xi_n^{\alpha}}, \quad \pi n \leq \xi_n \leq \pi(n+1),$$

то это утверждение становится очевидным.

Следовательно, если $q > 0$, то исходный интеграл сходится при условии $0 < \frac{p+q-1}{q} < 2$, или, что то же самое, при $|p-1| < q$.

Если $q < 0$, то, полагая $q = -q_1$, $q_1 > 0$, и производя аналогичные выкладки и рассуждения, приходим к такому условию сходимости данного интеграла: $|p-1| < q_1$, или $|p-1| < -q$. Объединяя оба случая и учитывая, что при $q = 0$ интеграл расходится, приходим к выводу, что данный интеграл может сходиться только при условии $\left| \frac{p-1}{q} \right| < 1$. ►

$$20. \int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}.$$

◀ Положим $x = e^{-t}$. Тогда получим

$$\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p} = \int_{-\ln 2}^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{|t|^p} = \int_{-\ln 2}^1 \frac{e^{-t} dt}{|t|^p} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^p}. \quad (1)$$

Поскольку $\frac{e^{-t}}{|t|^p} = O^*\left(\frac{1}{|t|^p}\right)$ при $t \rightarrow 0$, то первый интеграл в правой части равенства (1), в силу признака сравнения, сходится лишь при $p < 1$. Второй интеграл сходится при всяком p , так как $e^t > t^{2-p}$ при достаточно большом t . Последнее неравенство вытекает из того, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{2-p}}{e^t} = 0$. Следовательно, данный интеграл сходится лишь при $p < 1$. ►

$$21. \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx.$$

◀ Положим $t = (1-x)^{-1}$, $x \neq 1$. Тогда получим

$$\int_0^1 \frac{\cos(1-x)^{-1}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t dt}{t^{2-n-1} \left(2 - \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Поскольку функция $f: t \mapsto \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{n}}}$, $t > 1$, монотонна и ограничена, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t dt}{t^{2-n-1}}$, в силу признака Дирихле, сходится при $n < 0$ или при $n > \frac{1}{2}$, то рассматриваемый интеграл сходится, в силу признака Абеля, при этом же условии. Пользуясь приемом, примененным в примере 18, можно показать, что это условие является необходимым. ►

$$22. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx, p > 0.$$

◀ Разобьем данный интеграл на два

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx. \quad (1)$$

Так как $f(x) = \frac{\sin x}{x^p + \sin x} \sim \frac{1}{x^{p-1} + 1}$ при $x \rightarrow +0$, то первый интеграл в правой части равенства (1) сходится при любом p (точка $x = 0$ является точкой устранимого разрыва функции f). Поскольку

$$\frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right) = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{1}{2x^{2p}} + \frac{\cos 2x}{2x^{2p}} + o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

и интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{2p}} dx$, $p > 0$, в силу признака Дирихле, сходятся, а интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2p}}$ сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$, то второй интеграл из (1) сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$.

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость 19

Следовательно, исходный интеграл сходится при этом же условии. ►

Исследовать сходимость интегралов путем сравнения их с рядами:

$$23. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}, \quad n > 0.$$

◀ Поскольку

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{(k\pi+t) dt}{1+(k\pi+t)^n \sin^2 t},$$

то будем исследовать сходимость последнего ряда.

Легко видеть, что

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{k\pi dt}{1+(k+1)^n \pi^n \sin^2 t} < \int_0^{\pi} \frac{(k\pi+t) dt}{1+(k\pi+t)^n \sin^2 t} < \int_0^{\pi} \frac{(k+1)\pi dt}{1+k^n \pi^n \sin^2 t} = I_2,$$

где $I_1 = \frac{k\pi^2}{\sqrt{1+(k+1)^n \pi^2}}$, $I_2 = \frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+k^n \pi^2}}$. Так как $I_1 = O^*\left(\frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}}\right)$, $I_2 = O^*\left(\frac{1}{k^{\frac{n}{2}-1}}\right)$ при $k \rightarrow \infty$, то, по признаку сравнения, ряд, а значит и интеграл, сходится лишь при $n > 4$. ►

$$24. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

◀ Представив данный интеграл в виде

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}},$$

будем рассматривать последний ряд. Полагая $x = n\pi + t$, имеем

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{(n\pi+t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}}.$$

Заметим попутно, что этот интеграл является несобственным и сходится по признаку сравнения $\left(\frac{1}{(n\pi+t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} = O^*\left(\frac{1}{t^{\frac{p}{3}}}\right) \text{ при } t \rightarrow +0, \frac{1}{(n\pi+t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} = O^*\left(\frac{1}{(\pi-t)^{\frac{p}{3}}}\right), t \rightarrow \pi-0\right)$.

В силу оценок

$$\frac{1}{\pi^p(n+1)^p} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}} < \int_0^{\pi} \frac{dt}{(n\pi+t)^p \sqrt[3]{\sin^2 t}} < \frac{1}{\pi^p n^p} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt[3]{\sin^2 t}},$$

исследуемый ряд (интеграл) сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ который сходится только при $p > 1$. Следовательно, исходный интеграл сходится при этом же условии. ►

25. Доказать, что если: 1) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на $]y_1, y_2[$ и 2)

функция φ ограничена и монотонна по x , то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) \varphi(x, y) dx \quad (1)$$

сходится равномерно на $]y_1, y_2[$.

◀ Пусть произвольное число $\varepsilon > 0$ задано. В силу условия 1) согласно критерию Коши, $\exists B(\varepsilon)$ такое, что $\forall b', \xi, b'' > B(\varepsilon)$ независимо от $y \in]y_1, y_2[$ выполняются неравенства

$$\left| \int_{b'}^{\xi} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \left| \int_{\xi}^{b''} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad (2)$$

где $M = \sup_{x, y} |\varphi(x, y)| \neq 0$ (при $M = 0$ теорема, очевидно, справедлива).

Далее, поскольку функция φ монотонна по x , а функция f интегрируема, то, по второй теореме о среднем, имеем

$$\int_{b'}^{b''} f(x, y) \varphi(x, y) dx = \varphi(b' + 0, y) \int_{b'}^{\xi} f(x, y) dx + \varphi(b'' - 0, y) \int_{\xi}^{b''} f(x, y) dx,$$

где $b' \leq \xi \leq b''$. Отсюда, учитывая неравенства (2), получаем оценку

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y) \varphi(x, y) dx \right| \leq |\varphi(b' + 0, y)| \left| \int_{b'}^{\xi} f(x, y) dx \right| + |\varphi(b'' - 0, y)| \left| \int_{\xi}^{b''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

$\forall y \in]y_1, y_2[$. А это, по критерию Коши, и означает, что интеграл (1) сходится равномерно в указанной области. ▶

26. Доказать, что если: 1) функция $\varphi(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty, y \in]y_1, y_2[$, и монотонна по $x, x \in]a, +\infty[$; 2) первообразная $\int_a^x f(t, y) dt, y_1 < y < y_2$, ограничена абсолютной постоянной M , то интеграл

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x, y) f(x, y) dx \quad (1)$$

равномерно сходится в области $]y_1, y_2[$.

◀ К интегралу

$$\int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y) dx, \quad b', b'' \in]a, +\infty[,$$

применим вторую теорему о среднем. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y) dx \right| &= \left| \varphi(b' + 0, y) \int_{b'}^{\xi} f(x, y) dx + \varphi(b'' - 0, y) \int_{\xi}^{b''} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq M (|\varphi(b' + 0, y)| + |\varphi(b'' - 0, y)|). \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi(x, y)$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ равномерно по параметру $y \in]y_1, y_2[$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists B(\varepsilon)$ такое, что $|\varphi(b' + 0, y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ и $|\varphi(b'' - 0, y)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ при $y_1 < y < y_2$, если только $b' > B \wedge b'' > B$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists B(\varepsilon)$ такое, что

$$\left| \int_{b'}^{b''} \varphi(x, y) f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \in]y_1, y_2[,$$

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость 21
если только $b' > B$ и $b'' > B$. В силу критерия Коши, интеграл (1) сходится равномерно в области $]y_1, y_2[$, что и требовалось доказать. ►

27. Доказать, что равномерно сходящийся интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y} \right)^2 \right\} dx, \quad 0 < y < 1,$$

нельзя мажорировать сходящимся интегралом, не зависящим от параметра.

◄ Интеграл $L = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ сходится, а поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists B(\varepsilon)$ такое, что

$$\int_{B(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \varepsilon. \quad (1)$$

Выберем число A так, чтобы

$$A > \frac{2L}{\varepsilon} + B(\varepsilon). \quad (2)$$

Произведя в интеграле $\int_A^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y} \right)^2 \right\} dx$ замену $t = \frac{1}{y} \left(x - \frac{1}{y} \right)$ и используя неравенства (1) и (2), получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y} \right)^2 \right\} dx &= y \int_{\frac{1}{y} \left(A - \frac{1}{y} \right)}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \\ &< \begin{cases} y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2Ly < \varepsilon, & 0 < y < \frac{\varepsilon}{2L}, \\ \int_{\frac{1}{y} \left(A - \frac{1}{y} \right)}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \int_{A - \frac{2L}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-t^2} dt < \int_B^{+\infty} e^{-t^2} dt < \varepsilon, & \frac{\varepsilon}{2L} \leq y < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

из которой непосредственно следует равномерная сходимость интеграла на $]0, 1[$.

Что же касается мажорирования, то здесь можно привести следующие соображения. Предположим, что такая мажорантная функция F существует. Тогда должно быть

$$f(x, y) = \exp \left\{ -\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y} \right)^2 \right\} \leq F(x).$$

Легко видеть, что благодаря конструкции области определения функции $f :]1, +\infty[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ $\forall x \exists y = \frac{1}{x}$ такое, что $f(x, y) = 1$. Таким образом, $F(x) \geq 1 \forall x$. Очевидно, соответствующий несобственный интеграл от $F(x)$ расходится. ►

28. Показать, что интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

1) сходится равномерно в любом промежутке $0 < a \leq \alpha \leq b$ и 2) сходится неравномерно в промежутке $0 \leq \alpha \leq b$.

◄ В первом случае легко построить мажорирующую функцию $F : x \mapsto be^{-ax}$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно.

Во втором случае, произведя замену $t = \alpha x$, $x > 0 \wedge \alpha > 0$, получим

$$\int_B^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \int_{\alpha B}^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-\alpha B}.$$

Отсюда следует, что $\forall B > 0 \exists \alpha$, $\alpha \in]0, b[$, такое, что $e^{-\alpha B} > \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Например, число α можно выбрать из неравенства $0 < \alpha < \frac{1}{B} \ln \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, в этом случае интеграл сходится неравномерно. ►

29. Доказать, что интеграл Дирихле

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

1) сходится равномерно на каждом отрезке $[a, b]$, не содержащем значения $\alpha = 0$, и 2) сходится неравномерно на каждом отрезке $[a, b]$, содержащем значение $\alpha = 0$.

◀ В первом случае воспользуемся примером 25. Здесь функция $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow +\infty$ монотонно стремится к нулю (и равномерно относительно параметра α). Первообразная

$$\int_a^x \sin \alpha t dt = \frac{1}{\alpha} (\cos \alpha a - \cos \alpha x)$$

ограничена числом $\frac{2}{\min(|a|, |b|)}$. Следовательно, согласно примеру 25, данный интеграл сходится равномерно.

Во втором случае положим $x = \alpha t$, $\alpha > 0 \wedge t > 0$. Тогда получим

$$\int_B^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{B\alpha}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Отсюда следует, что $\forall B > 0 \exists \alpha \in [a, b]$ такое, что

$$\left| \int_B^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right| > \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \int_{0,1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Действительно, для этого достаточно взять $\alpha \leq \frac{0,1}{B}$.

При $\alpha < 0$ применяем подстановку $x = -\alpha t$ и, проводя аналогичные рассуждения, приходим к такому же выводу.

Таким образом, в этом случае интеграл сходится неравномерно. ►

30. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ в следующих промежутках:

а) $1 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$; б) $1 < \alpha < +\infty$.

◀ а) Легко видеть, что $\frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^{\alpha_0}}$ при $1 \leq x < +\infty$, $\alpha_0 \leq \alpha < +\infty$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha_0}}$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно.

б) Поскольку $\int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ и $\lim_{\alpha \rightarrow 1+0} \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1} = +\infty$, то $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall B_0 \exists B > B_0 \wedge \exists \alpha \in]1, +\infty[$ такие, что $\int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} > \varepsilon$. Следовательно, интеграл в этом случае сходится неравномерно. ►

31. Показать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$ сходится неравномерно на интервале $1 < \alpha < +\infty$.

◀ Пусть $B > 1$. Тогда справедлива оценка

$$\int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1} > \frac{1}{2} \int_B^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{B^{1-\alpha}}{\alpha-1} \rightarrow +\infty, \quad \alpha \rightarrow 1+0,$$

указывающая на то, что данный интеграл сходится неравномерно (см. пример 30). ▶

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие интегралы:

32. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, \quad -\infty < \alpha < +\infty.$

◀ Поскольку $\frac{|\cos \alpha x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}, -\infty < \alpha < +\infty$, и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно. ▶

33. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}, \quad 0 \leq \alpha < +\infty.$

◀ В интеграле $I(B, \alpha) = \int_B^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}$ произведем замену $x = \alpha + t$. Тогда $I(B, \alpha) =$

$\int_{B-\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 1}$. Если положить $\alpha = B > 0$, то при любом B будет $I(B, \alpha) > \epsilon$, где $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, данный интеграл сходится неравномерно. Заметим, что сходимость рассматриваемого интеграла при фиксированном $\alpha, 0 \leq \alpha < +\infty$, следует из признака сравнения $\left(\frac{1}{(x-\alpha)^2 + 1} \sim \frac{1}{x^2}, x \rightarrow +\infty\right)$. ▶

34. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad 0 \leq \alpha < +\infty.$

◀ Воспользуемся примером 25. Здесь $f(x, \alpha) = \frac{\sin x}{x}, \varphi(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$. Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$,

согласно признаку Дирихле, сходится, а функция $x \mapsto e^{-\alpha x}$ монотонна по x ($(e^{-\alpha x})'_x = -\alpha e^{-\alpha x} \leq 0$) и ограничена единицей. Следовательно, согласно указанному примеру, данный интеграл сходится равномерно. ▶

35. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx, \quad 0 \leq p \leq 10.$

◀ Поскольку $\frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}} = \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \leq \left(\frac{40}{e}\right)^{10} \frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$ при $x \geq e$, то, согласно признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно. ▶

36. $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{x^p} dx, \quad 0 \leq \alpha < +\infty, \text{ где } p > 0 \text{ фиксировано.}$

◀ В силу того, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx$ при $p > 0$ сходится (по признаку Дирихле), а функция $x \mapsto e^{-\alpha x}$ монотонна по x и ограничена единицей, то, согласно примеру 25, данный интеграл сходится равномерно. ▶

$$37. \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx, \quad 0 \leq \alpha < +\infty.$$

◀ Пологая $\sqrt{\alpha}x = t$ в интеграле $\int_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx$, имеем

$$\int_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{B\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Взяв $\alpha = \frac{1}{B^2}$, $B > 0$, получаем неравенство $\int_B^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx > \varepsilon$, справедливое при любом B , если

$$0 < \varepsilon < \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Следует заметить, что данный интеграл при $\alpha \geq 0$ сходится по признаку сравнения. ▶

$$38. I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy, \quad -\infty < x < +\infty.$$

◀ Очевидно, $I(0) = 0$. Пологая в данном интеграле $t = |x|y$, $x \neq 0$, получаем $I(x) = C \frac{\sin x}{|x|} e^{-x^2} \left(C = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \neq 0 \right)$. Так как $\lim_{x \rightarrow -0} I(x) = -C$, $\lim_{x \rightarrow +0} I(x) = C$, то функция I разрывна в нуле. А тогда, согласно теореме 1, п.2.5, интеграл сходится неравномерно (если бы он сходил равномерно, то, в силу непрерывности подынтегральной функции, представлял бы собой непрерывную функцию). ▶

$$39. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx, \quad p \geq 0.$$

◀ Произведя замену $x = \sqrt{t}$, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t dt}{2 \left(1+t^{\frac{p}{2}}\right) \sqrt{t}}.$$

Поскольку интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, в силу признака Дирихле, сходится, а функция $t \mapsto \frac{1}{2 \left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}$, $p \geq 0$, монотонна по t и ограничена числом 0,5, то, согласно примеру 25, данный интеграл сходится равномерно. ▶

$$40. \int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx, \text{ если: а) } p \geq p_0 > 0; \text{ б) } p > 0, q > -1.$$

◀ Произведем замену переменной x по формуле $x = e^{-t}$, $t > 0$. Тогда получим

$$\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_0^{+\infty} t^q e^{-pt} dt.$$

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость 25

а) Поскольку $t^q e^{-pt} \leq t^q e^{-p_0 t}$ и интеграл $\int_0^{+\infty} t^q e^{-p_0 t} dt$, в силу признака сравнения, сходится, то, согласно признаку Вейерштрасса, интеграл сходится равномерно.

б) В интеграле $I(B, p) = \int_B^{+\infty} t^q e^{-pt} dt$, $B > 0$, положим $z = pt$. Тогда получим

$$I(B, p) = \frac{1}{p^{q+1}} \int_{Bp}^{+\infty} z^q e^{-z} dz.$$

Пусть числа $B > 0$ и $\epsilon > 0$ заданы. Тогда в силу того, что

$$\lim_{p \rightarrow +0} \frac{1}{p^{q+1}} \int_{Bp}^{+\infty} z^q e^{-z} dz = +\infty,$$

всегда можно выбрать число $p > 0$ так, что $I(B, p) > \epsilon$.

Итак, данный интеграл сходится неравномерно. ►

$$41. \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad 0 \leq n \leq +\infty.$$

◀ Поскольку $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, данный интеграл сходится равномерно. ►

$$42. \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n}, \quad 0 < n < 2.$$

◀ Положим $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$. Тогда

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-n}} dt.$$

Далее, интегрированием по частям находим

$$\int_B^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-n}} dt = \frac{\cos B}{B^{2-n}} + (n-2) \int_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-n}} dt. \quad (1)$$

Последний интеграл, в силу примера 26, сходится равномерно (здесь функция $\varphi: t \mapsto \frac{1}{t^{3-n}} \leq \frac{1}{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и монотонна по t , первообразная $\int_a^x \cos t dt = \sin x - \sin a$ ограничена числом

2). Поэтому при достаточно большом B справедлива оценка $\left| \int_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-n}} dt \right| < \epsilon_1$, где $\epsilon_1 > 0$ — наперед заданное число.

Что же касается слагаемого $\frac{\cos B}{B^{2-n}}$ в (1), то оно не может быть сделано как угодно малым при всех достаточно больших $b \geq B$ равномерно относительно параметра n . Действительно, пусть $B > 0$ задано. Пусть, кроме этого, $0 < \epsilon_2 \leq \frac{1}{2}$. Тогда, выбирая число $b = 2k\pi > B$, $k \in \mathbb{N}$, значение параметра n из неравенства $0 < 2-n < \frac{\ln \epsilon_2^{-1}}{\ln 2k\pi}$, получаем $\left| \frac{\cos b}{b^{2-n}} \right| = \frac{1}{(2k\pi)^{2-n}} > \epsilon_2$.

Следовательно, исследуемый интеграл сходится неравномерно.

Заметим, что сходимость данного интеграла при $0 < n < 2$ вытекает из признака Дирихле. ►

$$43. \int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, \quad |\alpha| < \frac{1}{2}.$$

◀ Поскольку

$$0 \leq \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}, & 0 < x < 1, \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

то

$$\int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}} + \int_1^2 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}.$$

В силу оценок

$$\frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} = O^* \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right), \quad x \rightarrow +0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} = O^* \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \right), \quad x \rightarrow 1,$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} = O^* \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} \right), \quad x \rightarrow 2,$$

и признака сравнения, два последних интеграла сходятся. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, исследуемый интеграл сходится равномерно. ▶

$$44. \text{Подобрать число } b > 0 \text{ так, чтобы } 0 < \int_b^\infty \frac{dx}{1+x^n} < \varepsilon \text{ при } 1,1 \leq n \leq 10, \text{ где } \varepsilon = 10^{-6}.$$

◀ Поскольку $\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{1,1}}$, то

$$0 < \int_b^\infty \frac{dx}{1+x^n} < \int_b^\infty \frac{dx}{x^{1,1}} = \frac{10}{b^{0,1}}.$$

Таким образом, решая неравенство $\frac{10}{b^{0,1}} < 10^{-6}$, находим, что если $b > 10^{70}$, то указанное в условии примера неравенство будет обеспечено. ▶

45. Пусть интеграл

$$\int_a^b f(x, y) dx, \quad c < y < d, \quad (1)$$

является несобственным сходящимся интегралом и $x = \varphi(y)$, $\varphi(y) \in]a, b[$, есть кривая бесконечного разрыва функции f (подвижная особенность). Интеграл (1) будем называть *равномерно сходящимся* на интервале $]a, b[$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta > 0$ такое, что для любых δ_1 и δ_2 из неравенств $0 < \delta_1 < \Delta \wedge 0 < \delta_2 < \Delta$ следует неравенство

$$\left| \int_{\varphi(y)-\delta_1}^{\varphi(y)+\delta_2} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \in]c, d[.$$

Показать, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin(x, y)}{\sqrt{|x-y|}} dx, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

сходится равномерно.

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Покажем, что

$$\left| \int_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{\sin(x, y)}{\sqrt{|x-y|}} dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \in [0, 1] \quad (2)$$

в смысле данного выше определения.

Имеем

$$\left| \int_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{\sin(x, y)}{\sqrt{|x-y|}} dx \right| \leq \int_{y-\delta_1}^{y+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x-y|}} = \int_{y-\delta_1}^y \frac{dx}{\sqrt{y-x}} + \int_y^{y+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{x-y}} = 2 \left(\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2} \right) < 4\sqrt{\Delta} \quad (3)$$

для любых δ_1 и δ_2 таких, что $0 < \delta_1 < \Delta$ и $0 < \delta_2 < \Delta$.

Если теперь $\forall \varepsilon > 0$ взять $\Delta = \frac{\varepsilon^2}{16}$, то из (3) получим неравенство (2). Следовательно, данный интеграл сходится равномерно. ▶

46. Несобственный интеграл

$$\int_a^{+\infty} M(x, y) dx, \quad y \in Y, \quad (1)$$

где M — матричная функция, называется *равномерно сходящимся* на множестве Y , если $\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \geq a$ такое, что $\forall A > A_0 \wedge \forall y \in Y$ выполняется неравенство

$$\left\| \int_A^{+\infty} M(x, y) dx \right\| < \varepsilon,$$

где $M(x, y) = (a_{ij}(x, y))$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Доказать, что равномерная сходимость интеграла (1) эквивалентна равномерной сходимости всех интегралов

$$\int_a^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \text{ на } Y. \quad (2)$$

◀ 1. Пусть интегралы (2) сходятся равномерно. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \geq a$ такое, что $\forall A > A_0 \wedge \forall y \in Y$ выполняются неравенства

$$\left| \int_A^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

С учетом этих неравенств имеем оценку

$$\left\| \int_A^{+\infty} M(x, y) dx \right\| = \left\| \left(\int_A^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \right) \right\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\int_A^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \sqrt{mn},$$

которая показывает, что несобственный интеграл (1) сходится равномерно.

2. Пусть интеграл (1) сходится равномерно на Y . Тогда выполняется данное в условии определение, а значит, справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\int_A^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \right)^2} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \int_A^{+\infty} a_{ij}(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \in Y, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

т. е. несобственные интегралы от всех элементов матрицы $M(x, y)$ сходятся равномерно. ►

47. Писследовать на равномерную сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} M(x, y) dx, \quad y \in Y, \quad Y = [0, +\infty[, \quad M(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-x(y+1)} \sin x & \frac{\cos x(y+0,1)}{x+y} \\ x^{1-y} e^{-x} & \ln \left(1 + \frac{y}{x^2+y^3} \right) \end{pmatrix}.$$

◀ Согласно доказанному выше, равномерная сходимость данного интеграла эквивалентна равномерной сходимости интегралов от элементов матрицы $M(x, y)$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x(1+y)} \sin x dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x(y+0,1)}{x+y} dx, \quad \int_1^{+\infty} x^{1-y} e^{-x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{y}{x^2+y^3} \right) dx.$$

Первый, третий и четвертый интегралы сходятся равномерно по признаку Вейерштрасса, поскольку мажорируются соответствующими сходящимися интегралами

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx, \quad \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx, \quad \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

Второй интеграл также равномерно сходится, поскольку: 1) семейство функций $x \mapsto \frac{1}{x+y} \Rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$; 2) функция $x \mapsto \frac{1}{x+y}$ при каждом фиксированном y монотонно убывает к нулю;

3) $\left| \int_1^x \cos t(y+0,1) dt \right| \leq 20$, т. е. выполняются все условия примера 26. Таким образом, несобственный интеграл от матрицы $M(x, y)$ сходится равномерно. ►

48. Функция f интегрируема в промежутке $]0, +\infty[$. Доказать формулу

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

◀ Оценим разность

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx = \\ &= \int_0^B (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx + \int_B^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда, замечая, что интеграл $\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx$, согласно примеру 25, сходится равномерно при $\alpha \geq 0$ (здесь функция $|x| \mapsto e^{-\alpha x} - 1$ ограничена единицей и монотонна по $x \geq 0$, а интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, по условию, сходится), при достаточно большом

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость 29
 фиксированном B можем записать

$$\left| \int_B^{+\infty} (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \alpha \geq 0. \quad (2)$$

По данному ε и фиксированному B найдем α такое, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \int_0^B (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Имеем

$$\left| \int_0^B (e^{-\alpha x} - 1) f(x) dx \right| \leq (1 - e^{-\alpha B}) MB < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{B} \ln \frac{2MB}{2MB - \varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 2MB, \quad (4)$$

где $M = \sup_{0 \leq x \leq B} |f(x)| \neq 0$ (при $M = 0$ теорема тривиальна).

Тогда из (1), с учетом неравенств (2), (3), находим

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

если B достаточно велико, а число α удовлетворяет условию (4). ►

49. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0$, если f абсолютно интегрируема в промежутке $]0, +\infty[$.

◄ Данный интеграл, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно относительно параметра n . Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists A_0(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall A > A_0(\varepsilon) \wedge \forall n$

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x) \sin nx dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1)$$

Промежуток $[0, A]$ разобьем на $k + 1$ частей точками $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1} = A$ и представим интеграл $\int_0^A f(x) \sin nx dx$ в виде

$$\int_0^A f(x) \sin nx dx = \sum_{i=0}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - m_i) \sin nx dx + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^k m_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nx dx, \quad m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \{f(x)\}. \quad (2)$$

Поскольку $f(x) - m_i \leq \omega_i$, где ω_i — колебание функции f на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, то из (2) получаем оценку

$$\left| \sum_{i=0}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin nx dx \right| \leq \sum_{i=0}^k \omega_i \Delta x_i + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^k |m_i|. \quad (3)$$

В силу интегрируемости функции f , для ранее заданного $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение сегмента $[0, A]$, для которого

$$\sum_{i=0}^k \Delta x_i \omega_i < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4)$$

При выбранном разбиении числа m_i фиксированы; поэтому если возьмем $n > \frac{6}{\varepsilon} \sum_{i=0}^k |m_i|$,

то из неравенств (3), (4) и (1) получим окончательно $\left| \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| < \varepsilon$. ►

50. Доказать, что если: 1) $f(x, y) = f(x, y_0)$ на каждом интервале $]a, b[$; 2) $|f(x, y)| \leq F(x)$, где $\int_a^{+\infty} F(x) \, dx < +\infty$, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \, dx.$$

◀ Оценим по абсолютной величине разность

$$\int_0^{+\infty} f(x, y) \, dx - \int_0^{+\infty} f(x, y_0) \, dx = \int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0)) \, dx + \int_a^b f(x, y) \, dx - \int_b^{+\infty} f(x, y_0) \, dx, \quad b > a. \quad (1)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. В силу условия 2), при достаточно большом b справедливы оценки

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) \, dx \right| \leq \int_b^{+\infty} F(x) \, dx < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \int_b^{+\infty} f(x, y_0) \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (2)$$

а в силу условия 1), — оценка

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad \forall x \in]a, b[, \quad (3)$$

если разность $|y - y_0|$ достаточно мала.

Таким образом, из (1), с учетом оценок (2) и (3), получаем

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0) \, dx \right| < \varepsilon$$

при достаточной близости y к y_0 . ►

51. Пусть f — непрерывная и ограниченная на $[0, +\infty[$ функция. Доказать, что

$$I = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} \, dx = \pm f(0).$$

◀ Положим $x = ty$, $t > 0$, $y > 0$. Тогда

$$I = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2 + 1} \, dt.$$

Так как $\frac{|f(ty)|}{t^2+1} \leq \frac{M}{t^2+1}$, где $|f(ty)| \leq M = \text{const}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$ (сходится), а в силу непрерывности функции f дробь $\frac{f(ty)}{t^2+1} \Rightarrow \frac{f(0)}{t^2+1}$ при $y \rightarrow +0$ на каждом конечном интервале $]a, b[$, то, согласно примеру 50, получаем

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2+1} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \lim_{y \rightarrow +0} \frac{f(ty)}{t^2+1} dt = f(0). \quad (1)$$

В силу нечетности интеграла по переменной y и равенства (1), имеем

$$\lim_{y \rightarrow -0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{yf(x)}{x^2+y^2} dx = -f(0). \blacktriangleright$$

52. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1}$.

◀ Представляя данный интеграл в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} = 1 - \int_0^1 \frac{x^n dx}{x^n+1} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1}$$

и замечая, что

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{x^n+1} < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}, \quad n \geq 2,$$

получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+1} = 1. \blacktriangleright$$

53. Показать, что $F: \alpha \mapsto \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$ есть непрерывная функция на интервале $-\infty < \alpha < 2$.

◀ Выполняя замену $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$, получаем

$$F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t^{2-\alpha}} dt.$$

Пусть $-\infty < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Тогда, в силу оценки $\left| \frac{\sin \alpha t}{t^{2-\alpha}} \right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ и признака Вейерштрасса, рассматриваемый интеграл сходится равномерно. Если учесть еще, что функция $t \mapsto \frac{\sin \alpha t}{t^{2-\alpha}}$ при $-\infty < \alpha \leq \frac{1}{2}$, $t \geq 1$ непрерывна, то на основании теоремы 1, п.2.5, можно утверждать, что функция F непрерывна в указанном промежутке.

Пусть $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда $\left| \int_1^x \sin \alpha t dt \right| < \frac{2}{\alpha} \leq 4$; функция $t \mapsto \frac{1}{t^{2-\alpha}}$ при фиксированном α монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Это стремление, как показывает оценка $\frac{1}{t^{2-\alpha}} \leq \frac{1}{t^\varepsilon}$, равномерно по α . Поэтому, в соответствии с утверждением примера 26, данный интеграл сходится равномерно. Принимая еще во внимание непрерывность подынтегральной

функции при $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 2 - \varepsilon$, устанавливаем, что функция F непрерывна на рассматриваемом отрезке.

Таким образом, функция F непрерывна при $-\infty < \alpha \leq 2 - \varepsilon$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ произвольно, то требуемое доказано. ►

54. Определить точки разрыва функции

$$F : a \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin((1-a^2)x^2)}{x} dx.$$

◄ Полагая $t = (1-a^2)x$, $a \neq \pm 1$, получаем

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \operatorname{sgn}(1-a^2).$$

Очевидно, это выражение справедливо и при $|a| = 1$. Точки $a = 1$ и $a = -1$ являются точками разрыва первого рода функции F . ►

Исследовать на непрерывность в указанных промежутках следующие функции:

$$55. F : \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^\alpha}, \quad \alpha > 2.$$

◄ Можно показать (см. пример 31), что этот интеграл сходится неравномерно в указанной области (сходимость его вытекает из признака сравнения). Поэтому о непрерывности функции F сказать пока что ничего нельзя.

Пусть $\alpha \geq 2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. В случае $x \geq 1$ имеем $\frac{x}{2+x^\alpha} \leq \frac{x}{2+x^{2+\varepsilon}}$. Поскольку $\frac{x}{2+x^{2+\varepsilon}} = O^*\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$, то, на основании признака Вейерштрасса, интеграл

$$\Phi(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^\alpha}$$

сходится равномерно. Учитывая еще непрерывность подынтегральной функции, согласно теореме 1, п.2.5, устанавливаем непрерывность функции Φ при $\alpha \geq 2 + \varepsilon$, т. е. при $\alpha > 2$.

Принимая во внимание, что функция

$$\Psi : \alpha \mapsto \int_0^1 \frac{x dx}{2+x^\alpha},$$

в силу п.1.1, непрерывна при $\alpha > 2$, приходим к выводу, что функция $F : \alpha \mapsto \Psi(\alpha) + \Phi(\alpha)$ также непрерывна при $\alpha > 2$. ►

$$56. F : \alpha \mapsto \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha} dx, \quad 0 < \alpha < 2.$$

◄ Пусть $0 < \varepsilon \leq \alpha \leq 2 - \varepsilon < 2$. Тогда, разбивая данный интеграл на три интеграла и оценивая подынтегральную функцию, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha} dx &< \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}(\pi-x)^\alpha} + \int_1^{\pi-1} \frac{dx}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha} + \int_{\pi-1}^\pi \frac{dx}{x^\alpha(\pi-x)^{\alpha-1}} \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} + \pi - 2 + \int_{\pi-1}^\pi \frac{dx}{(\pi-x)^{1-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Поскольку последние интегралы, в силу признака сравнения, являются сходящимися, то, согласно признаку Вейерштрасса, исходный интеграл равномерно сходится при $\varepsilon \leq \alpha \leq 2 - \varepsilon$. Учитывая еще непрерывность функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha (\pi - x)^\alpha}$$

в области $0 < x < \pi$, $\varepsilon \leq \alpha \leq 2 - \varepsilon$, в соответствии с теоремой 1, п.2.5, заключаем, что функция F непрерывна на каждом отрезке $\varepsilon \leq \alpha \leq 2 - \varepsilon$. Следовательно, она непрерывна в интервале $0 < \alpha < 2$. ►

$$57. F : \alpha \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{|\sin x|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

◀ Замена переменной x по формуле $x = k\pi + t$ в интеграле под знаком суммы

$$F(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{e^{-x} dx}{|\sin x|^\alpha}$$

преобразует данный интеграл к следующему:

$$F(\alpha) = \frac{1}{1 - e^{-\pi}} \int_0^{\pi} \frac{e^{-t} dt}{\sin^\alpha t}.$$

Поскольку $\frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t} \leq \left(\frac{\pi}{2t}\right)^\alpha \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\varepsilon} \frac{1}{t^{1-\varepsilon}}$, $0 < t \leq 1$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, то, в силу признака Вейерштрасса, интеграл $\int_0^1 \frac{e^{-t} dt}{\sin^\alpha t}$ равномерно сходится на отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

Аналогично можно показать, что интеграл $\int_{\pi-1}^{\pi} \frac{e^{-t} dt}{\sin^\alpha t}$ также равномерно сходится на этом отрезке. Так как, кроме того, функция $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sin^\alpha t}$ непрерывна в области $0 < t < \pi$, $0 < \varepsilon \leq \alpha \leq 1 - \varepsilon$, то, согласно теореме 1, п.2.5, функция F непрерывна при $\alpha \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, эта функция непрерывна при $\alpha \in]0, 1[$. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на равномерную сходимость в указанных интервалах следующие несобственные интегралы:

$$18. \int_0^{+\infty} \frac{R(x+y)}{x+y+1} dx, \quad 0 < y < +\infty, \quad R - \text{функция Римана.}$$

$$19. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{x}} dx, \quad 0 < y \leq A. \quad 20. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{y}{y+1} \operatorname{arctg}(xy) dx, \quad 0 < y < +\infty.$$

$$21. \int_1^{+\infty} x \frac{\cos(x^2+y)}{x+y} dx, \quad y > 0. \quad 22. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{yxy} dx, \quad 1 < y < +\infty.$$

$$23. \int_0^1 x^{y-1} \ln(1-x) dx, \quad y > 0. \quad 24. \int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x^y} dx, \quad -\infty < y < 2.$$

$$25. \int_0^1 y \cos \frac{1}{x^2} dx, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Найти пределы:

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx, \quad \text{где } f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n}{2x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin 2tx}{t} dt. \quad 28. \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt.$$

Показать, что следующие функции непрерывны:

$$29. F: y \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(x+y)^2} dx}{\sqrt{x} + \sqrt{y+1}}, \quad 1 \leq y \leq 2. \quad 30. F: y \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(xy)}{\sqrt{x+y}} dx, \quad y \geq 1.$$

§ 3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла

3.1. Дифференцирование по параметру.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: 1) функция f'_y непрерывна в области $a \leq x < +\infty, y_1 \leq y \leq y_2$; 2) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится; 3) интеграл $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ сходится равномерно на отрезке $[y_1, y_2]$. Тогда

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

на отрезке $[y_1, y_2]$.

Теорема 2. Если функции f и f'_y непрерывны и ограничены в указанной области, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) \varphi(x) dx$ представляет собой значение дифференцируемой функции на отрезке $[y_1, y_2]$ и

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) \varphi(x) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) \varphi(x) dx.$$

3.2. Интегрирование по параметру.

Теорема 1. Если функция f непрерывна при $x \geq a$ и $y \in [y_1, y_2]$, а интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ равномерно сходится на $[y_1, y_2]$, то справедлива формула

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy.$$

Эта формула справедлива также и в том случае, когда $y_1 = -\infty, y_2 = +\infty$, если $f(x, y) \geq 0$, интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ непрерывны и один из повторных интегралов $\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ или $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ сходится.

Теорема 2. Если функция f непрерывна при $a \leq x < +\infty, c \leq y < +\infty$, а интегралы

$$\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \quad \text{и} \quad \int_c^{+\infty} f(x, y) dx$$

сходятся равномерно: первый — на каждом отрезке $[a, A]$, а второй — на каждом отрезке $[c, C]$, и если хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$$

сходится, то сходятся и равны между собой повторные интегралы

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Теорема 3. Если f непрерывна и ограничена при $a \leq x < +\infty$, $y \in [y_1, y_2]$, а интеграл $\int_a^{+\infty} |\varphi(x)| dx$ сходится, то

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) \varphi(x) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

58. Пользуясь формулой $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$, $n > 0$, вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx,$$

где $m \in \mathbb{N}$.

◀ Формально дифференцируя m раз по параметру n обе части указанной формулы, получаем

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{(m)} = (-1)^m \frac{m!}{n^{m+1}}.$$

Покажем, что m -кратное дифференцирование под знаком интеграла возможно. Для этого, полагая $x = \frac{1}{t}$, $t > 0$, преобразуем данные в условии интегралы к следующим:

$$\int_0^1 x^{n-1} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1}}, \quad I = (-1)^m \int_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{n+1}} dt.$$

Поскольку функции $t \mapsto t^{-n-1}$ и $t \mapsto t^{-n-1} \ln^m t$ непрерывны в области $0 < \varepsilon \leq n < +\infty$, $1 \leq t < +\infty$ и интеграл $\int_1^{+\infty} x^{n-1} dx$ сходится, то, в силу п.3.1, остается показать, что интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{n+1}} dt$ сходится равномерно на полуинтервале $0 < \varepsilon \leq n < +\infty$. Действительно, так как

$$\left| \frac{\ln^m t}{t^{n+1}} \right| \leq \frac{\ln^m t}{t^{1+\varepsilon}} = \frac{\ln^m t}{t^{\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \leq \left(\frac{2m}{e^\varepsilon}\right)^m \frac{1}{t^{1+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

то, в силу признака Вейерштрасса, интеграл I равномерно сходится на указанном полуинтервале. Следовательно, при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$, согласно теореме 1, п.3.1, дифференцирование по параметру n , $n \geq \varepsilon$, справедливо, т. е. справедливо при $n > 0$. ▶

59. Пользуясь формулой $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}, a > 0$, вычислить интеграл

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◀ Формально дифференцируя n раз по a левую и правую части данной в условии формулы, имеем

$$(-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{\pi}{a} \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! (2n-1)!!}{(2n)!! a^{n+1/2}} \pi,$$

откуда следует значение интеграла I_{n+1} .

Возможность n -кратного дифференцирования вытекает из п.3.1. Действительно, функции $(x, a) \mapsto \frac{1}{x^2+a}$ и $(x, a) \mapsto \frac{1}{(x^2+a)^{n+1}}$ непрерывны в области $0 < \varepsilon \leq a < +\infty, 0 \leq x < +\infty$.

Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a}$ сходится при $a > 0$. Интеграл I_{n+1} сходится равномерно по признаку

Вейерштрасса $\left(\frac{1}{(x^2+a)^{n+1}} \leq \frac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}} \text{ при } x \geq 0\right)$ на полуинтервале $\varepsilon \leq a < +\infty$. Поэтому на этом полуинтервале, а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и на интервале $0 < a < +\infty$ дифференцирование возможно. ▶

60. Доказать, что интеграл Дирихле $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ имеет при $\alpha \neq 0$ производную, однако ее нельзя найти с помощью правила Лейбница.

◀ Положим $\alpha x = t$. Тогда $I(\alpha) = \text{const}$. Следовательно, при $\alpha \neq 0$ имеем $I'(\alpha) = 0$. Если же формально продифференцировать по α под знаком интеграла, то получим расходящийся интеграл

$$\int_0^{+\infty} \cos \alpha x dx. \quad \blacktriangleright$$

61. Доказать формулу Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \quad a > 0, b > 0,$$

где f — непрерывная функция и интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходится $\forall A > 0$.

◀ В силу условий теоремы имеем

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx = \int_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt, \quad \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt,$$

откуда

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Применяя к последнему интегралу первую теорему о среднем, получаем

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(\xi) \int_{Aa}^{Ab} \frac{dt}{t} = f(\xi) \ln \frac{b}{a}, \quad Aa \leq \xi \leq Ab. \quad (1)$$

Поскольку функция f непрерывна, то $\lim_{A \rightarrow +0} f(\xi) = f(0)$, в силу чего из (1) вытекает, что существует

$$\lim_{A \rightarrow +0} \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}. \blacktriangleright$$

Замечание. Может случиться, что интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, $A > 0$, расходится, но существует

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty)$, а также сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f^*(x)}{x} dx$, где $f^*(x) = f(x) - f(+\infty)$.

Тогда на основании изложенного выше

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

Вычислить интегралы:

$$62. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

◀ Пусть $\alpha \geq \varepsilon > 0, \beta \geq \varepsilon > 0$. Тогда функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto -x e^{-\alpha x^2}$$

непрерывны в области $\alpha \geq \varepsilon > 0$; интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx,$$

в силу признака сравнения, сходится, а интеграл $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$, по признаку Вейерштрасса,

сходится равномерно (здесь $x \mapsto x e^{-\varepsilon x^2}$ мажорантная функция) на полуинтервале $\alpha \geq \varepsilon$. Поэтому дифференцирование по α под знаком интеграла по теореме 1, п.3.1, возможно. Имеем

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha}, \quad \alpha \geq \varepsilon > 0.$$

Отсюда находим $I(\alpha) = -\frac{1}{2} \ln \alpha + \varphi(\beta)$. Очевидно, $I(\beta) = 0$. Поэтому $\varphi(\beta) = \frac{1}{2} \ln \beta, \beta \geq \varepsilon > 0$.

Итак, $I(\alpha) = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}, \alpha \geq \varepsilon > 0$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, этот ответ справедлив $\forall \alpha > 0, \beta > 0$. ▶

$$63. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

◀ Как и в предыдущем примере, легко показать, что дифференцирование по α возможно (полагаем сначала, что $\alpha \geq \varepsilon > 0$, $\beta \geq \varepsilon > 0$). Тогда имеем

$$I'(\alpha) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\alpha+\beta)x} - e^{-2\alpha x}}{x} dx.$$

Применяя формулу Фруллани (см. пример 61), находим $I'(\alpha) = 2 \ln \frac{2\alpha}{\alpha+\beta}$. Отсюда интегрированием по α получаем

$$I(\alpha) = -2(\alpha + \beta)(\ln(\alpha + \beta) - 1) + 2\alpha(\ln 2\alpha - 1) + \varphi(\beta).$$

Из условия $I(\beta) = 0$ следует, что $\varphi(\beta) = 2\beta(\ln 2\beta - 1)$. Поэтому

$$I(\alpha) = \ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha} (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha + \beta)^{2\alpha+2\beta}}, \quad \alpha \geq \varepsilon > 0, \quad \beta \geq \varepsilon > 0.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ этот результат справедлив при $\alpha > 0$, $\beta > 0$. ▶

$$64. I(m) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

◀ Дифференцируя по параметру m , получаем

$$I'_m(m) = \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx \, dx. \quad (1)$$

Дифференцирование под знаком интеграла по теореме 1, п.3.1, возможно, так как функции

$$f : (m, x) \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad f'_m : (m, x) \mapsto (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) \cos mx$$

непрерывны в области $-\infty < m < +\infty$, $0 \leq x < +\infty$; интеграл (1), в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно, а данный интеграл сходится.

Выполняя интегрирование в (1), находим $I'_m(m) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + m^2}$, откуда $I(m) = \arctg \frac{m}{\alpha} - \arctg \frac{m}{\beta} + C$. Так как $I(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно, $I(m) = \arctg \frac{m(\beta - \alpha)}{\alpha\beta + m^2}$. ▶

$$65. I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq 1.$$

◀ Пусть $|\alpha| \leq 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда при фиксированном ε функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}}, & x \neq 0, \\ -\alpha^2, & x = 0, \end{cases} \quad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto \frac{-2\alpha}{(1 - \alpha^2 x^2) \sqrt{1 - x^2}}$$

непрерывны в области $|\alpha| \leq 1 - \varepsilon$, $|x| < 1$. Интеграл $I(\alpha)$ сходится по признаку сравнения, а интеграл

$$I'(\alpha) = -2 \int_0^1 \frac{\alpha dx}{(1 - \alpha^2 x^2) \sqrt{1 - x^2}}, \quad (1)$$

в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно $\left(|f'_\alpha(x, \alpha)| \leq \frac{2}{(1 - (1 - \varepsilon)^2 x^2) \sqrt{1 - x^2}} \right)$ на отрезке $|\alpha| \leq 1 - \varepsilon$. Следовательно, дифференцирование по параметру α под знаком интеграла возможно при $|\alpha| \leq 1 - \varepsilon$ (см. теорему 1, п.3.1).

Полагая в (1) $x = \sin t$, получаем

$$I'(\alpha) = -2\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - \alpha^2 \sin^2 t} = -\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Отсюда находим $I(\alpha) = \pi\sqrt{1 - \alpha^2} + C$. Так как $I(0) = 0$, то $C = -\pi$. Следовательно,

$$I(\alpha) = \pi \left(\sqrt{1 - \alpha^2} - 1 \right). \quad (2)$$

В силу произвольности ϵ , заключаем, что этот ответ пригоден при $|\alpha| < 1$.

Нетрудно видеть, что функция f непрерывна в области $|\alpha| \leq 1$, $|x| < 1$. В силу признака Вейерштрасса, интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на сегменте $|\alpha| \leq 1$ ($|f(x, \alpha)| \leq \frac{|\ln(1-x^2)|}{x^2\sqrt{1-x^2}}$). Следовательно, функция I непрерывна при $|\alpha| \leq 1$. Поэтому $I(\pm 1) = \lim_{|\alpha| \rightarrow 1-0} I(\alpha)$, т. е. формула (2) справедлива при $\alpha = \pm 1$. ►

$$66. I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq 1.$$

◀ Аналогично предыдущему (см. пример 65) получаем

$$I'(\alpha) = -2\alpha \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 - \alpha^2 x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right), & 0 < |\alpha| < 1, \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $I(\alpha) = -\pi \ln(1 + \sqrt{1 - \alpha^2}) + C$, $|\alpha| < 1$. Поскольку $I(0) = 0$, то $C = \pi \ln 2$. Следовательно,

$$I(\alpha) = -\pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}.$$

В силу непрерывности исходного интеграла при $|\alpha| \leq 1$ это выражение справедливо также при $|\alpha| \leq 1$. ►

$$67. I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

◀ Функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}, \quad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto \frac{1}{x(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}}$$

непрерывны в области $1 < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$; интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}}$$

равномерно сходятся по признаку Вейерштрасса, так как

$$\frac{|\operatorname{arctg} \alpha x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{\pi}{2x^2 \sqrt{x^2 - 1}}, \quad \frac{1}{x(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}} \leq \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

и соответствующие интегралы от мажорирующих функций сходятся. Следовательно, функции f и f'_α непрерывны при всех α и дифференцирование под знаком данного интеграла возможно. Имеем

$$I'(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Полагая здесь $x = \operatorname{ch} t$, получаем $I'(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right)$, откуда $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} (\alpha - \sqrt{1+\alpha^2}) + C$, $\alpha \geq 0$. Поскольку $I(0) = 0$, то $C = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} (1 + \alpha - \sqrt{1+\alpha^2})$, $\alpha \geq 0$.

Аналогично при $\alpha \leq 0$ получаем $I(\alpha) = -\frac{\pi}{2} (1 - \alpha - \sqrt{1+\alpha^2})$. Окончательно имеем $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} (1 + |\alpha| - \sqrt{1+\alpha^2}) \operatorname{sgn} \alpha$, $|\alpha| < \infty$. ►

$$68. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx.$$

◀ Пусть $\beta \neq 0$. Тогда функции

$$f : (x, \alpha) \mapsto \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2}, \quad f'_\alpha : (x, \alpha) \mapsto \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)}$$

непрерывны при $0 < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$; интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно, в силу признака Вейерштрасса, на любом отрезке $[-A, A]$,

$$\frac{|\ln(\alpha^2 + x^2)|}{\beta^2 + x^2} \leq \frac{\varphi(x)}{\beta^2 + x^2}, \quad \varphi(x) = \max \{ |\ln(\alpha^2 + x^2)|, |\ln x^2| \}.$$

Интеграл

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha dx}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \quad (1)$$

также сходится равномерно, но только на отрезке $0 < \varepsilon \leq |\alpha| \leq A$.

Действительно, в этом случае

$$\frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \leq \frac{2A}{(\varepsilon^2 + x^2)(\beta^2 + x^2)} \equiv \psi(x)$$

и интеграл $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx$ сходится.

Таким образом, функция I непрерывна $\forall \alpha \in]-\infty, +\infty[$, а функция I' непрерывна при $|\alpha| > 0$.

Выполняя интегрирование в (1), получаем $I'(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{|\alpha\beta|(|\alpha|+|\beta|)}$, $\alpha\beta \neq 0$, откуда $I(\alpha) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|) + C$.

Поскольку

$$I(0) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{2}{|\beta|} \int_0^{+\infty} \frac{\ln |\beta|}{1+t^2} dt + \frac{2}{|\beta|} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \frac{2 \ln |\beta|}{|\beta|} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi \frac{\ln |\beta|}{|\beta|},$$

то $C = 0$. Окончательно имеем $I(\alpha) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$, $\beta \neq 0$.

Заметим, что если $\beta = 0$, то данный интеграл сходится только при $|\alpha| = 1$. В этом случае интегрированием по частям легко установить, что $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx = \pi$. ►

$$69. I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg \alpha x \cdot \arctg \beta x}{x^2} dx.$$

◀ Очевидно, $I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} f(x, \alpha, \beta) dx$, где

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \arctg \alpha x \cdot \arctg \beta x, & x \neq 0, \\ \alpha\beta, & x = 0. \end{cases}$$

Функция f непрерывна в области $0 \leq x < +\infty$, $-\infty < \alpha, \beta < +\infty$, и данный интеграл, в силу признака Вейерштрасса, сходится равномерно (мажорантная функция φ строится так: при $0 \leq x \leq 1$ будет $|f(x, \alpha, \beta)| \leq |\alpha\beta|$, а при $x \geq 1$ имеем $|f(x, \alpha, \beta)| \leq \frac{\pi^2}{4x^2}$; т.е. $\varphi(x) = |\alpha\beta|$ при $0 \leq x \leq 1$ и $\varphi(x) = \frac{\pi^2}{4x^2}$ при $x \geq 1$). Следовательно, по п.2.5 функция I непрерывна $\forall \alpha, \beta \in]-\infty, +\infty[$.

Далее, пусть $0 < \varepsilon \leq \alpha \leq A < +\infty$, $0 < \delta \leq \beta \leq B < +\infty$. Тогда, как нетрудно проверить, справедливы формулы

$$I'_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \beta x}{x(1 + \alpha^2 x^2)} dx, \quad I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + \alpha^2 x^2)(1 + \beta^2 x^2)},$$

откуда находим $I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2(\alpha + \beta)}$. Интегрируя это равенство по β и α последовательно, получаем

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}(\alpha + \beta)(\ln(\alpha + \beta) - 1) + \varphi(\alpha) + \psi(\beta), \quad (1)$$

где φ, ψ — функции, подлежащие определению. В силу произвольности чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $A > 0$, $B > 0$ последнее соотношение справедливо при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Заметим, что (1) есть сужение функции I на область положительных значений параметров α и β . Для нахождения ее для всех $\alpha, \beta \in]-\infty, +\infty[$ нужно подобрать функции φ и ψ таким образом, чтобы функция I оказалась непрерывной $\forall \alpha, \beta$, как и должно быть по доказанному выше. Соотношение непрерывности

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow +0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} I(\alpha, \beta) = I(0, \beta) = I(\alpha, 0) = I(0, 0)$$

приводит к равенству

$$\varphi(\alpha) + \psi(\beta) = \frac{\pi}{2}(\beta(1 - \ln \beta) + \alpha(1 - \ln \alpha)). \quad (2)$$

Таким образом, учитывая тождество $I(\alpha, \beta) = I(|\alpha|, |\beta|) \operatorname{sgn}(\alpha\beta)$ и равенство (2), окончательно получаем

$$I(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\alpha\beta) \ln \frac{(|\alpha| + |\beta|)^{|\alpha| + |\beta|}}{|\alpha|^{|\alpha|} |\beta|^{|\beta|}}, & \text{если } \alpha\beta \neq 0, \\ 0, & \text{если } \alpha\beta = 0. \end{cases}$$

При решении следующих примеров считается известным значение интеграла Эйлера—

Пуассона:
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

70.
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx, \quad a > 0.$$

◀ Приводя трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ к виду $\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}$ и полагая $\sqrt{ax} + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$, получаем

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (At^2 + 2Bt + C) e^{-t^2} dt,$$

где

$$A = \frac{a_1}{a\sqrt{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}}, \quad B = \frac{b_1 a - a_1 b}{a^2} e^{\frac{b^2 - ac}{a}}, \quad C = \frac{a^2 c_1 - 2abb_1 + a_1 b^2}{a^2 \sqrt{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}}.$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \quad 2 \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} d(t^2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

то

$$I = \sqrt{\pi} \left(\frac{A}{2} + C \right) = \frac{1}{2a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} ((a + 2b^2)a_1 - 4abb_1 + 2a^2c_1) e^{-\frac{ac-b^2}{a}}. \blacktriangleright$$

$$71. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx \, dx, \quad a > 0.$$

◀ Имеем

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx} \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx} \, dx.$$

Замечая, что оба эти интеграла можно найти как частные случаи общего интеграла из предыдущего примера, получаем $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}. \blacktriangleright$

$$72. I(|a|) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx.$$

◀ Представляя данный интеграл в виде

$$\int_0^1 e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx + \int_1^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx$$

производя замену $y = \frac{1}{x}$ в первом интеграле, получаем

$$I(|a|) = \int_1^{+\infty} e^{-\left(a^2 y^2 + \frac{1}{y^2}\right)} \frac{dy}{y^2} + \int_1^{+\infty} e^{-\left(y^2 + \frac{a^2}{y^2}\right)} dy.$$

Так как подынтегральные функции f_1 и f_2 здесь непрерывны при всех a и $1 \leq y < +\infty$, а соответствующие интегралы, по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно ($|f_1(a, y)| \leq \frac{1}{y^2}$, $|f_2(a, y)| \leq e^{-y^2}$) и интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}$ и $\int_1^{+\infty} e^{-y^2} dy$ сходятся, то функция I непрерывна $\forall |a| \in \mathbb{R}$.

Пусть $|a| \geq \varepsilon > 0$. Поскольку функции $\frac{\partial f_1}{\partial a}$, $\frac{\partial f_2}{\partial a}$ непрерывны в области $|a| \geq \varepsilon$, $1 \leq y < +\infty$ а соответствующие интегралы от них, в силу мажорантного признака, сходятся равномерно на каждом отрезке $\varepsilon \leq |a| \leq A$, то функция I' непрерывна при $|a| > 0$. Следовательно,

$$\frac{dI(|a|)}{d|a|} = -2|a| \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} \frac{dx}{x^2}. \quad (1)$$

Кроме того, положив в исходном интеграле $x = \frac{|a|}{y}$, $y > 0$, можем написать

$$I(|a|) = |a| \int_0^{+\infty} e^{-\left(y^2 + \frac{a^2}{y^2}\right)} \frac{dy}{y^2}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем дифференциальное уравнение $I'(|a|) + 2I(|a|) = 0$, решая которое, находим $I(|a|) = Ce^{-2|a|}$, $|a| > 0$.

Но функция $I(|a|)$ непрерывна, поэтому должно быть $I(0) = \lim_{|a| \rightarrow 0} (Ce^{-2|a|})$. Учитывая, что $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, откуда находим $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Итак, окончательно получаем $I(|a|) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|a|}$. ►

$$73. I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

◄ Функции $f : (b, x) \mapsto e^{-ax^2} \cos bx$ и $f'_b : (b, x) \mapsto -xe^{-ax^2} \sin bx$ непрерывны в области $0 \leq x < +\infty$, $-\infty < b < +\infty$; интегралы

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx, \quad \int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bx \, dx,$$

в силу признака Вейерштрасса, сходятся равномерно относительно параметра b . Следовательно, функции I и I' непрерывны $\forall b \in \mathbb{R}$ и

$$I'(b) = - \int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bx \, dx = \frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin bx \Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx = -\frac{b}{2a} I(b).$$

Отсюда $I'(b) + \frac{b}{2a} I(b) = 0$. Решая это уравнение, находим $I(b) = Ce^{-\frac{b^2}{4a}}$. Поскольку $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, то $I(b) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. ►

$$74. \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◄ Дифференцируя $2n$ раз интеграл из предыдущего примера и полагая $a = 1$, получаем

$$\frac{d^{2n}}{db^{2n}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = (-1)^n 2^{2n} \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \right)^{(2n)},$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \left(e^{-b^2} \right)^{(2n)}. \quad \blacktriangleright$$

$$75. \text{ Исходя из интеграла } I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \text{ вычислить интеграл}$$

$$\text{Дирихле } D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx.$$

◄ Поскольку функция

$$f : (\alpha, x) \mapsto \begin{cases} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}, & x \neq 0, \\ \beta, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывна при каждом конечном $\alpha \geq 0$, $0 \leq x < +\infty$, а интеграл $\int_0^{+\infty} f(\alpha, x) dx$, в силу примера 25, сходится равномерно по $\alpha \geq 0$, то функция I непрерывна по переменной $\alpha \geq 0$ и поэтому $I(+0, \beta) = D(\beta)$.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда функция $\varphi : (\beta, x) \mapsto e^{-\alpha x} \cos \beta x$, $x \geq 0$, $-\infty < \beta < +\infty$, непрерывна и интеграл

$$I'_\beta(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx, \quad (1)$$

в силу мажорантного признака, сходится равномерно относительно параметра β , поскольку $|e^{-\alpha x} \cos \beta x| \leq e^{-\alpha x}$. Следовательно, дифференцирование по β возможно, и после выполнения интегрирования в (1) получаем $I'_\beta(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$, $\alpha > 0$. Отсюда находим $I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha)$. Так как $I(\alpha, 0) = 0$, то $C(\alpha) \equiv 0$ и $I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$.

Таким образом, окончательно имеем

$$D(\beta) = I(+0, \beta) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta. \blacktriangleright$$

Используя интеграл Дирихле и формулу Фруллани, вычислить интегралы:

$$76. I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - \cos \beta x}{x^2} dx, \quad \alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}.$$

◀ При $\alpha \geq \varepsilon > 0$, $|\beta| \geq \varepsilon > 0$ и $0 \leq x < +\infty$ функции

$$f : (\alpha, \beta, x) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2}(e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x), & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}\beta^2 - \alpha, & x = 0, \end{cases}$$

$$f'_\alpha : (\alpha, \beta, x) \mapsto -e^{-\alpha x^2}, \quad f'_\beta : (\alpha, \beta, x) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin \beta x}{x}, & x \neq 0, \\ \beta, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывны. Данный интеграл, а также интегралы $I'_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} f'_\alpha(\alpha, \beta, x) dx$, $I'_\beta(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} f'_\beta(\alpha, \beta, x) dx$ сходятся равномерно (первый — в силу признака Вейерштрасса, второй — в силу примера 26). Следовательно, функции I , I'_α , I'_β непрерывны и существует дифференциал

$$dI(\alpha, \beta) = \left(- \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right) d\alpha + \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx \right) d\beta = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} d\alpha + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta d\beta$$

(см. интегралы Дирихле и Эйлера—Пуассона), откуда интегрированием находим

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi \alpha} + C. \quad (1)$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, этот результат справедлив при $\alpha > 0$, $|\beta| > 0$. Покажем, что он справедлив также и при $\alpha \geq 0$, $-\infty < \beta < +\infty$.

Разбив исходный интеграл на два интеграла

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 f(\alpha, \beta, x) dx + \int_1^{+\infty} f(\alpha, \beta, x) dx,$$

видим, что первый интеграл — непрерывная функция α и β при любых α и β . Второй интеграл равномерно сходится при $\alpha \geq 0$ и любом β , так как $|f(\alpha, \beta, x)| \leq \frac{2}{x^2}$. Кроме

того, функция f непрерывна, поэтому и второй интеграл — также непрерывная функция при $\alpha \geq 0$, β — любое.

Используя непрерывность функции I , находим постоянную C из соотношения $I(0, 0) =$

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \left(\frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi \alpha} + C \right) = 0.$$

Таким образом, из (1) окончательно имеем $I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi \alpha}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. ►

$$77. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

◀ Представляя данный интеграл в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha - \beta)x}{x} dx$$

и пользуясь интегралом Дирихле (см. пример 75), получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{4} (\operatorname{sgn}(\alpha + \beta) + \operatorname{sgn}(\alpha - \beta)). \quad \blacktriangleright$$

$$78. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq \pm \beta.$$

◀ Пользуясь формулой Фруллани (см. пример 61), находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} (\cos |\alpha - \beta|x - \cos |\alpha + \beta|x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right|, \quad \alpha \neq \pm \beta. \quad \blacktriangleright$$

$$79. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

◀ Используя тождество $\sin^3 \alpha x = \frac{3}{4} \sin \alpha x - \frac{1}{4} \sin 3\alpha x$, а также интеграл Дирихле (см. пример 75), имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx = \frac{3}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx - \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 3\alpha x}{x} dx = \frac{3\pi}{8} \operatorname{sgn} \alpha - \frac{\pi}{8} \operatorname{sgn} 3\alpha = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha. \quad \blacktriangleright$$

$$80. I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx.$$

◀ Преобразовывая разность $\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x$ к виду

$$\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x = \frac{1}{4} ((1 - \cos 2\alpha x)^2 - (1 - \cos 2\beta x)^2) = \frac{1}{4} (f(|\beta|x) - f(|\alpha|x)),$$

$$f(x) = 2 \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 4x,$$

запишем

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{f(|\beta|x) - f(|\alpha|x)}{x} dx.$$

Теперь применим формулу Фруллани (см. пример 61). Поскольку функция f непрерывна

и интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, по признаку Дирихле, сходится $\forall A > 0$, то по указанной формуле $I(\alpha, \beta) = \frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$, если $\alpha\beta \neq 0$. Если $\alpha = 0, \beta \neq 0$ или $\beta = 0, \alpha \neq 0$, то данный интеграл расходится. Наконец, если $\alpha = \beta = 0$, то интеграл существует и равен нулю. Поэтому окончательно имеем

$$I(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|, & \text{если } \alpha\beta \neq 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = \beta = 0. \end{cases} \blacktriangleright$$

$$81. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx.$$

◀ После замены переменной x по формуле $x = \sqrt{t}, t > 0$, получаем интеграл Дирихле (см. пример 75):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleright$$

$$82. \text{Найти разрывный множитель Дирихле } D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

◀ Полагая в примере 77 $x = \lambda, \alpha = 1, \beta = x$ получаем

$$D(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(1+x) + \operatorname{sgn}(1-x)), \quad D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = \pm 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

$$83. \text{Вычислить интеграл } I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx.$$

◀ Положим $t = x + b$. Тогда

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{t} \cos(ab) dt - \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at}{t} \sin ab dt = 2 \cos(ab) \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \pi \cos(ab) \operatorname{sgn} a,$$

так как

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at}{t} dt = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{-A}^{-\epsilon} \frac{\cos at}{t} dt + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^A \frac{\cos at}{t} dt = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции, а

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{-A}^{-\epsilon} \frac{\sin at}{t} dt + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^A \frac{\sin at}{t} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t} dt$$

в силу четности подынтегральной функции. $\blacktriangleright$

84. Пользуясь формулой $\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$, вычислить интеграл Лапласа $L(\alpha) =$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx.$$

◀ Согласно условию имеем

$$L(\alpha) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} \cos \alpha x dy.$$

Введя множитель e^{-kx^2} , $k > 0$, рассмотрим интеграл

$$L^*(k, \alpha) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dx. \quad (1)$$

Функция $f : (x, y) \mapsto e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x$ непрерывна в области $0 \leq x < +\infty$, $0 \leq y < +\infty$; интегралы

$$\int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dy \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dx$$

сходятся равномерно в силу мажорантного признака Вейерштрасса (действительно, имеют место неравенства $|e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x| \leq e^{-y}$, $|e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x| \leq e^{-kx^2}$, а интегралы $\int_0^{+\infty} e^{-y} dy$, $\int_0^{+\infty} e^{-kx^2} dx$ сходятся); интеграл (1), как следует из оценки

$$\left| \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-y-(k+y)x^2} \cos \alpha x dy \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-kx^2} dx,$$

сходится. Следовательно, по теореме 2, п.3.2, можно в (1) изменить порядок интегрирования. Тогда получим

$$L^*(k, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-(k+y)x^2} \cos \alpha x dx.$$

Используя решение примера 73, находим

$$L^*(k, \alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y+k}} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4(y+k)} + y\right)} dy = \sqrt{\pi} e^k \int_{\sqrt{k}}^{+\infty} e^{-\gamma(t)} dt, \quad \gamma(t) = \frac{\alpha^2}{4t^2} + t^2. \quad (2)$$

Поскольку интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-kx^2} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$ равномерно сходится при $k \geq 0$ и подынтегральная функция непрерывна, то функция L^* непрерывна по переменной k (см. теорему 1, п.2.5). Поэтому

$$L(\alpha) = \lim_{k \rightarrow +0} L^*(k, \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{4t^2} + t^2\right)} dt.$$

Последний интеграл был вычислен в примере 72. Таким образом, окончательно имеем $L(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ►

Вычислить следующие интегралы:

$$85. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$$

◄ Используя тождество $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ и интеграл Лапласа, получаем $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx =$

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-2}). \text{ ►}$$

$$86. \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx.$$

◄ Вводя функцию f по формуле

$$f: y \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{y^2 + x^2} dx, \quad |y-1| \leq \frac{1}{2},$$

замечаем (после замены $x = yt$), что $f(y) = \frac{1}{y} L(|\alpha|y)$, а также $f'_y(1) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx$, L — интеграл Лапласа. Следовательно (см. пример 84), имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} f'(1) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} L(|\alpha|y) \right)_{y=1} = \frac{\pi}{4} (1 + |\alpha|) e^{-|\alpha|}. \text{ ►}$$

$$87. I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x dx}{ax^2 + 2bx + c}, \quad a > 0, \quad ac - b^2 > 0.$$

◄ Выделяя полный квадрат в знаменателе и производя замену по формуле $\sqrt{ax} + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$, имеем

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\alpha t}{\sqrt{a}} \cos \frac{\alpha b}{a}}{t^2 + y^2} dt + \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{\alpha t}{\sqrt{a}} \sin \frac{\alpha b}{a}}{t^2 + y^2} dt,$$

где $y^2 = c - \frac{b^2}{a} > 0$.

Замечая, что в силу нечетности подынтегральной функции второй интеграл равен нулю, а первый легко вычисляется через интеграл Лапласа, получаем

$$I(\alpha) = \frac{2}{|y|\sqrt{a}} \cos \frac{\alpha b}{a} \cdot L\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{a}}|y|\right) = \frac{\pi \cos \frac{\alpha b}{a}}{\sqrt{ac - b^2}} e^{-\frac{|\alpha|}{a} \sqrt{ac - b^2}}. \text{ ►}$$

88. С помощью интегралов Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

вычислить следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx, \quad a \neq 0.$$

◀ Приводя квадратный трехчлен к каноническому виду и производя затем замену переменной по формуле $\sqrt{ax} + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$, $a > 0$, имеем

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx = \frac{\cos y}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t^2 dt + \frac{\sin y}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right),$$

где $y = c - \frac{b^2}{a}$. При $a < 0$ следует положить $a = -a_1$, $a_1 > 0$, и провести аналогичные выкладки. В общем случае получаем

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin\left(\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} a + \frac{ac - b^2}{a}\right), \quad a \neq 0. \blacktriangleright$$

89. Доказать формулы:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \sin(|\alpha|a);$$

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \cos(\alpha a) \operatorname{sgn} \alpha,$$

где $a \neq 0$ и интегралы понимаются в смысле главного значения Коши.

◀ 1) Легко видеть, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a + x} dx + \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a - x} dx.$$

Вычисляя эти интегралы способом, изложенным в примере 83, получаем формулу 1).

2) Представляя значение подынтегральной функции в виде $\frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \frac{\sin \alpha x}{-a+x} - \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha x}{a+x}$ и используя указанный пример, получаем формулу 2). ▶

90. Найти преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p > 0,$$

для функции f , если: а) $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$; б) $f(t) = \sqrt{t}$; в) $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$; г) $f(t) = \sin(\alpha\sqrt{t})$.

◀ а) Функция $\psi : (p, t) \mapsto e^{-pt} t^n$ непрерывна при $p > 0$, $0 \leq t < +\infty$ и при любом $n > 0$. Данный интеграл равномерно сходится при $p \geq \epsilon > 0$ и при любой интегрируемой функции, для которой справедлива оценка $|f(t)|e^{-\epsilon t} \leq \text{const}$. В нашем случае $t^n e^{-\epsilon t} \leq \left(\frac{n}{\epsilon}\right)^n e^{-n}$. Следовательно, дифференцирование под знаком интеграла по параметру p , $p > 0$, возможно.

Пусть $f(t) \equiv 1$. Тогда $F(p) = \frac{1}{p}$ и

$$\frac{d^n}{dp^n} F(p) = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt,$$

откуда $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

б) Выполняя замену $\sqrt{t} = x$, находим

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sqrt{t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-px^2} x^2 dx,$$

откуда интегрированием по частям получаем

$$F(p) = -\frac{x}{p} e^{-px^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-px^2} dx = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

в) В этом случае воспользуемся формулой Фруллани. Имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt} - e^{-(p+1)t}}{t} dt = \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right).$$

г) После замены $\sqrt{t} = z$ приходим сначала к интегралу

$$F(p) = 2 \int_0^{+\infty} z e^{-pz^2} \sin \alpha z dz,$$

а после интегрирования по частям — к интегралу

$$F(p) = \frac{\alpha}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pz^2} \cos \alpha z dz,$$

который вычислен в примере 73. Окончательно имеем

$$F(p) = \frac{\alpha \sqrt{\pi}}{2p \sqrt{p}} e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}. \blacktriangleright$$

91. Доказать формулу (интеграл Липшица)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} I_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a > 0,$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого индекса (см. пример 12).

◀ Функция $\psi : (t, \varphi) \mapsto \cos(bt \sin \varphi)$ непрерывна при $0 \leq t < +\infty$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ сходится, поэтому данный интеграл сходится равномерно по параметру. Следовательно, по теореме 1, п.3.2, справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-at} dt \int_0^{\pi} \cos(bt \sin \varphi) d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt \sin \varphi) dt,$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} I_0(bt) dt = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \blacktriangleright$$

92. Найти преобразование Вейерштрасса

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy,$$

если $f(y) = \cos ay$.

◀ Полагая $x - y = t$, получаем

$$F(x) = \frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos at dt + \frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin at dt.$$

В силу нечетности подынтегральной функции, второй интеграл равен нулю, а первый вычислен в примере 73. Таким образом, имеем

$$F(x) = e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Применяя метод дифференцирования и интегрирования по параметру под знаком интеграла, вычислить интегралы:

$$31. I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} dx, \alpha \geq 0. \quad 32. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^4} dx. \quad 33. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin^2 x}{x^3} dx.$$

$$34. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} dx. \quad 35. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{\operatorname{ch} x} dx. \quad 36. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \frac{\sin x}{x} dx. \quad 37. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}(1 - \cos ax)}{x} dx.$$

$$38. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cdot \ln(\sin x) dx. \quad 39. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^\alpha \ln \left(\ln \frac{1}{x}\right) dx. \quad 40. \int_0^{+\infty} e^{-|a|x^2} \sin^2 bx \frac{dx}{x}.$$

Вычислить:

$$41. \text{v. p.} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a - b \cos x}, \quad 0 < a < b. \quad 42. \text{v. p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^3}. \quad 43. \text{v. p.} \int_0^{2\pi} \frac{x dx}{1 - a \cos x}, \quad a > 1.$$

$$44. \lim_{a \rightarrow b} \left(\text{v. p.} \int_a^b \frac{\varphi(s) ds}{x-s} \right), \quad a < b; \text{ функция } \varphi \text{ удовлетворяет условию Гельдера: } \exists \alpha, L$$

такие, что $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < L|x_1 - x_2|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.

Найти преобразование Лапласа для функций:

$$45. f: x \mapsto \frac{\cos^2 \sqrt{kx}}{\sqrt{\pi x}}, \quad x > 0. \quad 46. f: x \mapsto \frac{\operatorname{ch}^2 \sqrt{kx}}{\sqrt{\pi x}}, \quad x > 0.$$

§ 4. Эйлеровы интегралы

4.1. Гамма-функция.

Определение. Функция

$$\Gamma: p \mapsto \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad 0 < p < +\infty,$$

называется *гамма-функцией*, а ее значение — *эйлеровым интегралом*.

Функция Γ непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка при $p > 0$ и для них справедлива формула

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln x)^k e^{-x} dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4.2. Основные формулы.

Если $p > 0$, то

$$\Gamma(p+1) = p \Gamma(p) \quad (1)$$

(формула понижения). Если $n \in \mathbb{N}$, то

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad (2)$$

а также

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}. \quad (3)$$

Если $0 < p < 1$, то

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \quad (4)$$

(формула дополнения).

4.3. Бета-функция.

Определение. Функция

$$B : (p, q) \mapsto \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0 \wedge q > 0,$$

называется бета-функцией, а ее значение — эйлеровым интегралом.

Бета-функция непрерывна в области определения и обладает частными производными любого порядка, которые можно найти путем дифференцирования по переменным p, q под знаком интеграла. Полезно представление

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}} dz. \quad (1)$$

Связь между B - и Γ -функциями выражается формулой

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (2)$$

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

93. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0.$

◀ Полагая $x = a\sqrt{t}$, $t > 0$, и пользуясь формулами (2), (3), п.4.2, и формулой (2), п.4.3, получаем

$$\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^4}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^4 \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}. \quad \blacktriangleright$$

94. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$

◀ Используя представление (1) и формулу (2), п.4.3, имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} dx}{(1+x)^2} = B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)}.$$

Далее, применяя формулы понижения (1) и дополнения (4), п.4.2, находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} dx}{(1+x)^2} = \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

95. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

◀ Полагая $x = \sqrt{t}$, $t > 0$, получаем

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}. \blacktriangleright$$

Выразить через эйлеровы интегралы:

96. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx, \quad n > 0.$

◀ Замена $x = t^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$, приводит к интегралу

$$\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, 1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \Gamma\left(1 - \frac{m}{n}\right) \Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi m}{n}}.$$

Этот результат справедлив при $0 < m < n$. $\blacktriangleright$

97. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}, \quad a > 0, b > 0, n > 0.$

◀ Полагая $x = \left(\frac{b}{a}t\right)^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p} dt = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \frac{1}{na^p} B\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right).$$

Следовательно, данный интеграл сходится при условии $0 < \frac{m+1}{n} < p$. $\blacktriangleright$

98. $I = \int_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}} dx, \quad 0 < a < b, c > 0.$

◀ Выполняя замену $\frac{x-a}{b+c} = \frac{b-a}{b+c}t$, получаем

$$I = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}} \int_0^1 t^m (1-t)^n dt = \frac{(b-a)^{m+n+1} B(m+1, n+1)}{(b+c)^{m+1}(a+c)^{n+1}}.$$

Отсюда следует, что данный интеграл сходится, если $m > -1, n > -1$. $\blacktriangleright$

$$99. I_{mn} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx.$$

◀ Положим $\sin x = \sqrt{t}$, $t > 0$. Тогда

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Очевидно, интеграл сходится, если $m > -1$, $n > -1$. ▶

$$100. \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx, \quad 0 < |k| < 1.$$

◀ Вводя новую переменную по формуле $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, имеем

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx = \frac{2^n}{(1+k)^n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1} dt}{(1+\alpha^2 t^2)^n}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}.$$

Полагая далее $\alpha t = \sqrt{z}$, получаем

$$I = \frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right), \quad n > 0. \quad \blacktriangleright$$

$$101. \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx.$$

◀ Применяя подстановку $\ln \frac{1}{x} = t$, получаем

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt = \Gamma(p+1), \quad p > -1. \quad \blacktriangleright$$

$$102. I(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x dx, \quad a > 0.$$

◀ После замены $x = \frac{t}{a}$ получаем

$$I(p) = \frac{1}{a^{p+1}} \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} \ln t dt - \frac{\ln a}{a^{p+1}} \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt.$$

Легко видеть, что первый интеграл есть значение производной от гамма-функции аргумента $p+1$, $p+1 > 0$, а второй равен $\Gamma(p+1)$. Следовательно,

$$I(p) = \frac{\Gamma'(p+1)}{a^{p+1}} - \frac{\ln a}{a^{p+1}} \Gamma(p+1) = \frac{d}{dp} \left(\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}} \right). \quad \blacktriangleright$$

$$103. I(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx.$$

◀ Очевидно, функция I является производной от бета-функции (см. п.4.3). Поэтому

$$I(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{d}{dp} B(p, 1-p) = \frac{d}{dp} (\Gamma(p)\Gamma(1-p)) = \frac{d}{dp} \left(\frac{\pi}{\sin p\pi} \right) = -\frac{\pi^2 \cos p\pi}{\sin^2 p\pi},$$

$0 < p < 1$. ▶

$$104. I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx.$$

◀ Полагая $x = t^{\frac{1}{3}}$ и используя результат предыдущего примера, получаем

$$I = \frac{1}{9} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2}{3}-1}}{1+t} \ln t dt = -\frac{1}{9} \cdot \frac{\pi^2 \cos \frac{2\pi}{3}}{\sin^2 \frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi^2}{27}. \blacktriangleright$$

$$105. I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx.$$

◀ Применяя подстановку $x = t^{\frac{1}{4}}$, $t > 0$, приходим к интегралу

$$I = \frac{1}{64} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}} \ln^2 t}{1+t} dt,$$

являющемуся второй производной от бета-функции

$$p \mapsto \frac{1}{64} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1} dt}{(1+t)^{p+(1-p)}},$$

вычисленной в точке $p = \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{64} \cdot \frac{d^2}{dp^2} (B(p, 1-p)) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{1}{64} \cdot \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{\pi}{\sin p\pi} \right) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{64} \pi^3. \blacktriangleright$$

$$106. I(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1+x) \ln x} dx.$$

◀ Очевидно, если $p = q$, то интеграл равен нулю. Используя признак сравнения, нетрудно установить, что данный интеграл сходится, если $0 < p < 1$, $0 < q < 1$.

Далее, замечая, что

$$I(p, q) = \int B(p, 1-p) dp - \int B(q, 1-q) dq + C,$$

где C — постоянная, имеем

$$I(p, q) = \pi \int \frac{dp}{\sin p\pi} - \pi \int \frac{dq}{\sin q\pi} + C = \pi \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi q}{2}} \right| + C.$$

Полагая здесь $p = q$, находим, что $C = 0$.

Таким образом, имеем

$$I(p, q) = \pi \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi q}{2}} \right|, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < q < 1. \blacktriangleright$$

$$107. I = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx, \quad 0 < p < 1.$$

◀ Рассмотрим интеграл

$$F(\varepsilon) = \int_0^1 (x^{p-1} - x^{-p})(1-x)^{-1+\varepsilon} dx, \quad \varepsilon \geq 0. \quad (1)$$

Поскольку функция $f: (x, \varepsilon) \mapsto \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{(1-x)^{1-\varepsilon}}$ при $0 < x < 1$ и $\varepsilon \geq 0$ непрерывна, а интеграл (1) сходится равномерно при $\varepsilon \geq 0$, в силу признака Вейерштрасса

$$\left(|f(x, \varepsilon)| \leq \frac{|x^{p-1} - x^{-p}|}{1-x}, \int_0^1 \frac{|x^{p-1} - x^{-p}|}{1-x} dx < +\infty \right),$$

то функция F непрерывна и возможен предельный переход под знаком интеграла (1) при $\varepsilon \rightarrow +0$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx. \quad (2)$$

Принимая во внимание, что $F(\varepsilon) = B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon)$, из (2) находим

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\varepsilon)} - \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p+\varepsilon)} \right).$$

Отсюда, используя формулу $\Gamma(\varepsilon) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ и применяя правило Лопиталья, получаем

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\Gamma'(1-p+\varepsilon)}{\Gamma(1-p)} - \frac{\Gamma'(p+\varepsilon)}{\Gamma(p)} \right) = (\ln(\Gamma(1-p)\Gamma(p)))'_p = \pi \operatorname{ctg} \pi p. \blacktriangleright$$

$$108. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x} dx, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

◀ Полагая $e^{-2\beta x} = t$, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x} dx = \frac{1}{2\beta} \int_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{-p}}{1-t} dt,$$

где $p = \frac{\beta-\alpha}{2\beta}$. Поскольку $0 < p < \frac{1}{2}$, то можно воспользоваться результатом предыдущего примера. Имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x} dx = \frac{\pi}{2\beta} \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2\beta}. \blacktriangleright$$

$$109. I = \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x dx.$$

◀ Производя замену $x = 1-t$, получаем интеграл

$$I = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) \sin \pi x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x)) \sin \pi x dx,$$

откуда с помощью формулы дополнения (см. п.4.2) находим

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln \pi - \ln \sin \pi x) \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi} \ln \pi - \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \sin \pi x \sin \pi x dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln \pi - \frac{1}{2\pi} (\cos \pi x + (1 - \cos \pi x) \ln \sin \pi x - \ln(1 + \cos \pi x)) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right). \blacktriangleright$$

110. Доказать равенство

$$\prod_{m=1}^n \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

◀ Полагая $x = t^{\frac{1}{n}}$, $t > 0$, получаем

$$\int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m}{n}\right),$$

откуда

$$\prod_{m=1}^n \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n^n} \prod_{m=1}^n \Gamma\left(\frac{m}{n}\right). \quad (1)$$

При $n = 1$ равенство (1), очевидно, справедливо. Поэтому далее считаем, что $n \geq 2$. Записывая произведение (1) в прямом и обратном порядках, замечаем, что

$$\left(\prod_{m=1}^n \Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\right)^2 = \left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \left(\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \left(\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\right) \dots \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Отсюда, используя формулу дополнения, находим

$$\prod_{m=1}^n \Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n}}}. \quad (2)$$

Для вычисления произведения синусов разложим двучлен $z^n - 1$ на множители. Имеем $z^n - 1 = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$, z_k — нули этого двучлена, т. е. $\sqrt[n]{1} = \exp\left(ik \frac{2\pi}{n}\right)$,

$i^2 = -1$, $k = \overline{0, n-1}$. Следовательно, $\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k)$, откуда

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n - 1}{z - 1} = n = \lim_{z \rightarrow 1} \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{ik \frac{2\pi}{n}}\right). \quad (3)$$

Поскольку $\left|1 - e^{ik \frac{2\pi}{n}}\right| = 2 \sin \frac{\pi k}{n}$, то из (3) получаем формулу

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (4)$$

Наконец, подставляя (4) в (2), а затем (2) в (1), получаем доказываемое тождество. ▶

111. Используя равенство $\frac{1}{x^m} - \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt$, $x > 0$, найти интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m} dx$,

$0 < m < 1$, $a \neq 0$.

◀ Имеем

$$I = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} \cos ax dx \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt = \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow +0}} \int_{\delta}^A \cos ax dx \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt. \quad (1)$$

Функция $f: (x, t) \mapsto t^{m-1} e^{-xt} \cos ax$ непрерывна при $0 < t < +\infty$, $\delta \leq x \leq A$. Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} t^{m-1} \cos ax dt,$$

в силу мажорантного признака ($|f(x, t)| \leq t^{m-1} e^{-\delta t}$), сходится равномерно относительно $x \in [\delta, A]$. Тогда, по теореме 1, п.3.2, в (1) можно выполнить перестановку интегралов:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow +0}} \int_0^{+\infty} t^{m-1} dt \int_{\delta}^A e^{-xt} \cos ax dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(m)} \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow +0}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} (a \sin aA - t \cos aA)}{a^2 + t^2} e^{-tA} dt + \right. \\ &\quad \left. + \cos a\delta \int_0^{+\infty} \frac{t^m e^{-\delta t}}{a^2 + t^2} - a \sin a\delta \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} e^{-\delta t}}{a^2 + t^2} dt \right). \quad (2) \end{aligned}$$

Первый интеграл в (2), как следует из оценки

$$\left| \int_0^1 \dots + \int_1^{+\infty} \dots \right| < \frac{1 + |a|}{a^2} \int_0^1 e^{-tA} dt + e^{-A} \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} (|a| + t)}{a^2 + t^2} dt,$$

стремится к нулю при $A \rightarrow +\infty$. Второй интеграл, в силу равномерной (по признаку Вейерштрасса) сходимости его относительно δ ($0 \leq \delta \leq \delta_0$) и непрерывности подынтегральной функции в области $0 < t < +\infty$, $0 \leq \delta \leq \delta_0$, согласно теореме 1, п.4.2, при $\delta \rightarrow +0$ стремится к интегралу

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m dt}{a^2 + t^2} = \frac{|a|^{m-1}}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, 1 - \frac{m+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2|a|^{1-m} \cos \frac{\pi m}{2}}.$$

По той же причине третий интеграл (вместе с $\sin a\delta$) стремится к нулю при $\delta \rightarrow +0$.

Таким образом, окончательно получаем $I = \frac{\pi |a|^{m-1}}{2\Gamma(m) \cos \frac{\pi m}{2}}$, $a \neq 0$. ▶

112. Доказать формулы Эйлера:

$$a) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x;$$

$$b) \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha) dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x, \quad \lambda > 0, x > 0, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

◀ Нетрудно видеть, что подынтегральные функции в а) и б) и их производные по α непрерывны при $0 < t < +\infty$ и $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Кроме того, данные интегралы (обозначим их через $F(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$ соответственно) при $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ сходятся по признаку сравнения. Интегралы

$$F'(\alpha) = -\lambda \int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt, \quad (1)$$

$$\Phi'(\alpha) = \lambda \int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt, \quad (2)$$

по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно на каждом отрезке $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Действительно, функция $t \mapsto t^x e^{-\lambda t \sin \varepsilon}$ является мажорирующей для подынтегральных функций в (1) и (2), а интеграл $\int_0^{+\infty} t^x e^{-\lambda t \sin \varepsilon} dt$ сходится по признаку сравнения. Следовательно, дифференцирование в (1), (2) возможно при $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$.

Выполняя в (1) и (2) интегрирование по частям (приняв $t^x = u$, $e^{-\lambda t \cos \alpha} \sin(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt = dv$, $t^x = u$, $e^{-\lambda t \cos \alpha} \cos(\lambda t \sin \alpha - \alpha) dt = dv$ соответственно), получаем систему дифференциальных уравнений

$$F'(\alpha) = -x \Phi(\alpha), \quad \Phi'(\alpha) = x F(\alpha).$$

Решая эту систему, находим

$$F(\alpha) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \quad \Phi(\alpha) = -A \cos \alpha x + B \sin \alpha x, \quad (3)$$

где A, B — постоянные; $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Замечая что

$$F(0) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}, \quad \Phi(0) = 0,$$

из (3) определяем эти постоянные: $A = 0$, $B = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$.

Подставляя найденные значения постоянных в (3), получаем

$$F(\alpha) = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \cos \alpha x, \quad \Phi(\alpha) = \frac{\Gamma(x)}{\lambda^x} \sin \alpha x. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

$$47. \int_0^1 x^3 (1-x^3)^{\frac{1}{3}} dx. \quad 48. \int_0^{\frac{\pi}{2}} t g^{\frac{1}{3}} x dx. \quad 49. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^3)^2} dx.$$

$$50. \int_0^1 \frac{x(1-x)^6 dx}{(1-3x+3x^2)^3}. \quad 51. \int_0^1 x^3 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^5 dx. \quad 52. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{ch} \beta x} dx.$$

53. Используя формулу понижения, построить продолжение функции Γ для отрицательных значений аргумента.

54. Построить эскиз графика функции B .

§ 5. Интегральная формула Фурье

5.1. Представление функции интегралом Фурье.

Теорема. Если функция $f:]-\infty; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ является кусочно-гладкой на каждом конечном отрезке числовой прямой и абсолютно интегрируема на $]-\infty, +\infty[$, то справедлива формула

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^t d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)), \quad (1)$$

или

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Если f — непрерывная функция, то $\frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)) = f(x)$ и интегральная формула (1) принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Для упрощения записи вид формулы (2) сохраняют и в том случае, когда функция f разрывна. Интеграл в (2) называют *интегралом Фурье* функции f .

Часто формулу (2) используют в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi, \quad i^2 = -1. \quad (3)$$

Интеграл в (3) называют *комплексным интегралом Фурье* функции f .

5.2. Преобразования Фурье.

Теорема. Если функция $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ является кусочно-гладкой на каждом отрезке полупрямой $x > 0$ и абсолютно интегрируема на $]0, +\infty[$, то

$$\bar{f}_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{f}_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (1)$$

$$\bar{f}_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{f}_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda. \quad (2)$$

Равенства (1) называют *синус-преобразованием Фурье* функции f , а равенства (2) — *косинус-преобразованием*; причем, первые формулы в (1) и (2) называют *прямым преобразованием*, а вторые — *обратным*.

Из формулы (3), п.5.1, следует прямое комплексное преобразование Фурье:

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\lambda s} ds \quad (3)$$

и обратное комплексное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (4)$$

Представить интегралом Фурье следующие функции:

113. $f: x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$

◀ Данная функция удовлетворяет условиям теоремы п.5.1 и, следовательно, ее можно представить интегралом Фурье. Легко видеть, что $b(\lambda) = 0$ (в силу четности функции f), а

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \lambda x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda}{\lambda}.$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda, \quad |x| \neq 1,$$

что и требовалось.

Следует заметить, что в точках $x = \pm 1$ разрыва функции f интеграл Фурье, согласно теории, равен $\frac{1}{2}$. Действительно, поскольку

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(1+x)}{\lambda} d\lambda + \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(1-x)}{\lambda} d\lambda \right),$$

то, применяя формулу Дирихле (см, пример 75), имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(1+x) + \operatorname{sgn}(1-x)),$$

откуда и следует указанный результат. ▶

114. $f: x \mapsto \operatorname{sgn}(x - \alpha) - \operatorname{sgn}(x - \beta), \quad \beta > \alpha.$

◀ Замечая, что

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \alpha, \\ 1, & \text{если } x = \alpha, \\ 2, & \text{если } \alpha < x < \beta, \\ 1, & \text{если } x = \beta, \\ 0, & \text{если } x > \beta, \end{cases}$$

имеем

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \cos \lambda x dx = \frac{2}{\pi \lambda} (\sin \lambda \beta - \sin \lambda \alpha),$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sin \lambda x dx = \frac{2}{\pi \lambda} (\cos \lambda \alpha - \cos \lambda \beta).$$

Следовательно, представление интегралом Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} ((\sin \lambda \beta - \sin \lambda \alpha) \cos \lambda x + (\cos \lambda \alpha - \cos \lambda \beta) \sin \lambda x) d\lambda =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(\beta - x) + \sin \lambda(x - \alpha)}{\lambda} d\lambda.$$

В данном примере значение функции f совпадает с ее интегралом Фурье во всех точках числовой прямой. ►

115. $f: x \mapsto \frac{1}{a^2 + x^2}.$

◀ Функция f при $a \neq 0$ дифференцируема и абсолютно интегрируема на интервале $]-\infty, +\infty[$. Следовательно, она представима интегралом Фурье. Имеем $b(\lambda) = 0$ (в силу четности функции f),

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x dx}{a^2 + x^2} (x = |a|t) = \frac{2}{\pi|a|} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda|a|t) dt}{1 + t^2} = \frac{1}{|a|} e^{-\lambda|a|}, \quad a \neq 0$$

(см. пример 84). Запишем теперь интегральную формулу Фурье данной функции:

$$f(x) = \frac{1}{|a|} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda|a|} \cos \lambda x d\lambda, \quad \text{если } a \neq 0. \quad \blacktriangleright$$

116. $f: x \mapsto \frac{x}{a^2 + x^2}, \quad a \neq 0.$

◀ Функция f дифференцируема и не является абсолютно интегрируемой на интервале $]-\infty, +\infty[$, однако она интегрируема на нем в смысле главного значения Коши и может быть представлена интегралом Фурье.

Легко видеть, что $a(\lambda) = 0$, $b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \lambda x}{a^2 + x^2} dx.$

Этот интеграл равномерно сходится по параметру $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ в силу примера 26 (здесь $\frac{x}{a^2 + x^2}$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, а $\left| \int_0^x \sin \lambda t dt \right| \leq \frac{2}{\lambda_0}$). Следовательно, его можно найти как производную (с точностью до знака) от функции, рассмотренной в предыдущем примере, т. е.

$$b(\lambda) = - \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x dx}{a^2 + x^2} \right)'_{\lambda} = e^{-\lambda|a|}.$$

Интеграл Фурье функции $x \mapsto \frac{x}{a^2 + x^2}$ имеет вид

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda|a|} \sin \lambda x d\lambda, \quad a \neq 0. \quad \blacktriangleright$$

117. $f: x \mapsto \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi. \end{cases}$

◀ Эта функция непрерывна, кусочно-гладкая и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой. Кроме того, она нечетна;

$$a(\lambda) = 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin \lambda x \, dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\sin \pi \lambda}{1 - \lambda^2}, & \lambda \neq 1, \\ 1, & \lambda = 1. \end{cases}$$

Итак, $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi \lambda}{1 - \lambda^2} \sin \lambda x \, d\lambda$. ▶

118. $f: x \mapsto e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.

◀ Рассматриваемая функция непрерывна, дифференцируема всюду, за исключением точки $x = 0$, и абсолютно интегрируема на всей числовой прямой. Следовательно, она представляется интегралом Фурье.

Поскольку функция f четная, то $b(\lambda) = 0$,

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \lambda x \, dx = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}.$$

Таким образом, искомое представление данной функции интегралом Фурье имеет вид

$$e^{-\alpha|x|} = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\alpha^2 + \lambda^2} \, d\lambda; \quad \alpha > 0. \quad \blacktriangleright$$

119. $f: x \mapsto e^{-\alpha|x|} \sin \beta x$, $\alpha > 0$.

◀ Нетрудно проверить, что эта функция дифференцируема всюду и абсолютно интегрируема на $]-\infty, +\infty[$ ($|e^{-\alpha|x|} \sin \beta x| \leq e^{-\alpha|x|}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}$ сходится). Поэтому ее можно представить интегралом Фурье.

Учитывая нечетность функции, имеем

$$a(\lambda) = 0, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \sin \lambda x \, dx.$$

Переходя под интегралом от произведения синусов к разности косинусов, получаем

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta - \lambda)x \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta + \lambda)x \, dx = \\ &= \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + (\beta - \lambda)^2)} - \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2)} = \frac{4\alpha\beta\lambda}{\pi(\alpha^2 + (\beta - \lambda)^2)(\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e^{-\alpha|x|} \sin \beta x = \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x \, d\lambda}{(\alpha^2 + (\beta - \lambda)^2)(\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2)}, \quad \alpha > 0. \quad \blacktriangleright$$

120. $f: x \mapsto e^{-x^2}$.

◀ Замечая, что все условия теоремы о представимости функции интегралом Фурье здесь выполняются, имеем

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \lambda x dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \quad (\text{см. пример 73}),$$

$$b(\lambda) = 0 \quad (\text{в силу четности функции } x \mapsto e^{-x^2}).$$

Таким образом, представление интегралом Фурье имеет вид

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \cos \lambda x d\lambda. \blacktriangleright$$

121. Функцию $f: x \mapsto e^{-x}$, $0 < x < +\infty$, представить интегралом Фурье, продолжая ее: а) четным образом; б) нечетным образом.

◀ В случае а) в выражении для функции f вместо x подставим $|x|$; в случае б) будем рассматривать функцию $F: x \mapsto f(|x|) \operatorname{sgn} x$. Очевидно, при $x > 0$ функции $\Phi: x \mapsto e^{-|x|}$ и $F: x \mapsto e^{-|x|} \operatorname{sgn} x$ совпадают с данной функцией, а при $x < 0$ первая из них является четным продолжением, вторая же — нечетным продолжением функции f , т. е. $\Phi(-x) = \Phi(x)$, $F(-x) = -F(x)$.

Поскольку функции Φ и F удовлетворяют условиям представимости их интегралом Фурье, то по соответствующим формулам находим

$$a_{\Phi}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \lambda x dx = \frac{2}{\pi(\lambda^2 + 1)}, \quad b_{\Phi}(\lambda) = 0,$$

$$a_F(\lambda) = 0, \quad b_F(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin \lambda x dx = \frac{2\lambda}{\pi(\lambda^2 + 1)}.$$

Таким образом, в первом случае

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda,$$

а во втором

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda. \blacktriangleright$$

Найти прямое комплексное преобразование Фурье функции f , если:

122. $f: x \mapsto e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.

◀ Подставляя данную функцию в указанную формулу преобразования (см. (3), п.5.2), получаем

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t| - it\lambda} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} \cos t\lambda dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} \sin t\lambda dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos t\lambda dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}, \quad \alpha > 0. \blacktriangleright$$

123. $f: x \mapsto xe^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.

◀ Как и в предыдущем примере, находим

$$\begin{aligned}\bar{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|-\imath t\lambda} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|} \cos t\lambda dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\alpha|t|} \sin t\lambda dt = \\ &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} te^{-\alpha t} \sin t\lambda dt = -i\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha\lambda}{(\lambda^2 + \alpha^2)^2}, \quad \alpha > 0.\end{aligned}$$

Заметим, что последний интеграл можно получить дифференцированием интеграла Фурье из предыдущего примера по параметру λ (дифференцирование под знаком интеграла справедливо в силу равномерной сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} te^{-\alpha t} \sin t\lambda dt$ относительно λ). ▶

124. Найти прямое синус-преобразование Фурье функции

$$f: x \mapsto \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 2, \\ 3, & 2 < x < 4, \\ 0, & 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

◀ Функция f удовлетворяет условиям теоремы п.5.2, поэтому она допускает прямое синус-преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}\bar{f}_s(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^2 \sin \lambda x dx + 3 \int_2^4 \sin \lambda x dx \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} (1 - \cos 2\lambda + 3(\cos 2\lambda - \cos 4\lambda)) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + 2 \cos 2\lambda - 3 \cos 4\lambda). \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

125. Найти прямое косинус-преобразование Фурье функции

$$f: x \mapsto \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ e^{1-x}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

◀ Функция f является кусочно-гладкой на любом отрезке полуинтервала $x > 0$ и абсолютно интегрируемой на $]0, +\infty[$, поэтому к ней можно применить косинус-преобразование Фурье. По первой формуле (1), п.5.2, имеем

$$\begin{aligned}\bar{f}_c(\lambda) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^1 x \cos \lambda x dx + \int_1^{+\infty} e^{1-x} \cos \lambda x dx \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} + \frac{\cos \lambda - \lambda \sin \lambda}{\lambda^2 + 1} \right). \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

Применяя преобразования Фурье, решить следующие дифференциальные задачи:

126. $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = \varphi(x), & 0 < x < +\infty, \\ y(0) = 0, \quad y(+\infty) = y'(+\infty) = 0, \end{cases} \quad \omega = \text{const.}$

◀ Применим синус-преобразование Фурье. Для этого умножим обе части уравнения на $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda x$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} y''(x) \sin \lambda x dx + \omega^2 \bar{y}_s(\lambda) = \bar{\varphi}_s(\lambda). \quad (1)$$

К интегралу применим интегрирование по частям и учтем при этом краевые условия:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} y''(x) \sin \lambda x dx &= y'(x) \sin \lambda x \Big|_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} y'(x) \cos \lambda x dx = \\ &= -\lambda \left(y(x) \cos \lambda x \Big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} y(x) \sin \lambda x dx \right) = -\lambda^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{y}_s(\lambda). \end{aligned}$$

Подставив это значение в (1) и решив полученное уравнение относительно $\bar{y}_s(\lambda)$, найдем

$$\bar{y}_s(\lambda) = \frac{\bar{\varphi}_s(\lambda)}{\omega^2 - \lambda^2}.$$

Для восстановления функции y используем обратное синус-преобразование Фурье:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\bar{\varphi}_s(\lambda)}{\omega^2 - \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda. \blacktriangleright$$

$$127. \begin{cases} y'' + \omega^2 y = \varphi(x), & 0 < x < +\infty, \\ y'(0) = 0, \quad y(+\infty) = y'(+\infty) = 0, \end{cases} \quad \omega = \text{const.}$$

◀ Применим косинус-преобразование Фурье. Для этого умножим обе части уравнения на $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \lambda x$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} y''(x) \cos \lambda x dx + \omega^2 \bar{y}_c(\lambda) = \bar{\varphi}_c(\lambda). \quad (1)$$

Учитывая краевые условия, преобразуем интеграл:

$$\int_0^{+\infty} y''(x) \cos \lambda x dx = y'(x) \cos \lambda x \Big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} y'(x) \sin \lambda x dx = -\lambda^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \bar{y}_c(\lambda).$$

А тогда из (1) аналогично проделанному выше получим

$$\bar{y}_c(\lambda) = \frac{\bar{\varphi}_c(\lambda)}{\omega^2 - \lambda^2}.$$

Применяя к функции $\bar{y}_c$ обратное преобразование Фурье, приходим к решению данной задачи:

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\bar{\varphi}_c(\lambda)}{\omega^2 - \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти прямое синус-преобразование Фурье следующих функций:

$$55. f: x \mapsto \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty. \end{cases} \quad 56. f: x \mapsto \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x < +\infty. \end{cases}$$

$$57. f: x \mapsto \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ 0, & 2\pi < x < +\infty. \end{cases} \quad 58. f: x \mapsto \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2, \\ e^{-x}, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

Найти прямое косинус-преобразование Фурье следующих функций:

$$59. f: x \mapsto \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x < +\infty. \end{cases} \quad 60. f: x \mapsto \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ e^{-x}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$61. f: x \mapsto \begin{cases} \arcsin(\sin x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x < +\infty. \end{cases}$$

62. Найти прямое комплексное преобразование Фурье производных f' , f'' , если

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0.$$

63. Применяя комплексное преобразование Фурье, решить следующую дифференциальную задачу:

$$y'' + 3y' + y = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad y(\pm\infty) = y'(\pm\infty) = 0.$$

Кратные и криволинейные интегралы

§ 1. Интеграл Римана на компакте. Приведение кратных интегралов к повторным и их вычисление

1.1. Мера m -мерного параллелепипеда.

Если в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ задана система векторов $\mathbf{y}_j$, $j = \overline{1, m}$, и на ней построен m -мерный параллелепипед $\overline{\mathcal{T}}$, то его мерой (объемом) $\mu\overline{\mathcal{T}} = |\overline{\mathcal{T}}|$ будем называть число

$$|\overline{\mathcal{T}}| = \sqrt{\Gamma(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m)}, \quad (1)$$

где

$$\Gamma(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle & \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_m \rangle \\ \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 \rangle & \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{y}_m, \mathbf{y}_1 \rangle & \langle \mathbf{y}_m, \mathbf{y}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m \rangle \end{vmatrix} \quad (2)$$

— определитель Грама от этих векторов. Параллелепипед $\overline{\mathcal{T}} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$ называется m -мерным бруском. Его ребра взаимно перпендикулярны, так как он построен на векторах $\mathbf{y}_j = (b_j - a_j)\mathbf{e}_j$, $j = \overline{1, m}$, где $\mathbf{e}_j$ — векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^m$, у которых j -я координата равна единице, а все остальные — нули. Для скалярного произведения $\langle \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_k \rangle$ имеем

$$\langle \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_k \rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq j, \\ (b_j - a_j)^2, & \text{если } k = j, \end{cases}$$

в силу чего равенство (1) принимает вид

$$|\overline{\mathcal{T}}| = \prod_{j=1}^m (b_j - a_j). \quad (3)$$

Кроме бруса $\overline{\mathcal{T}}$ рассматривают также открытый брус $\mathcal{T} =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_m, b_m[$ и полуоткрытые брусы $\mathcal{T} = [a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_m, b_m[$, $\mathcal{T} =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_m, b_m]$. В каждом случае полагают $\mu\mathcal{T} = |\mathcal{T}| = |\overline{\mathcal{T}}|$.

Если каждое ребро $[a_j, b_j]$, $j = \overline{1, m}$, бруса $\overline{\mathcal{T}}$ разбить на n_j частей точками $x_0^{(j)} = a_j < x_1^{(j)} < \dots < x_{n_j}^{(j)} = b_j$ и провести через эти точки гиперплоскости $x_j = x_k^{(j)}$, $k = \overline{0, n_j}$, то получим так называемое *сеточное разбиение* $\Pi = \{\overline{\mathcal{T}}_1, \overline{\mathcal{T}}_2, \dots, \overline{\mathcal{T}}_n\}$ ($n = n_1 n_2 \dots n_m$) бруса $\overline{\mathcal{T}}$ на элементарные брусы (ячейки) $\overline{\mathcal{T}}_i$, $i = \overline{1, n}$. В качестве ячеек можно брать не только замкнутые брусы $\overline{\mathcal{T}}_i$, но и открытые брусы $\mathcal{T}_i$.

Если Π — сеточное разбиение бруса $\overline{\mathcal{T}}$, то

$$\mu\overline{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^n \mu\overline{\mathcal{T}}_i = \sum_{i=1}^n |\overline{\mathcal{T}}_i|. \quad (4)$$

Пусть $f: \bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная на m -мерном брус $\bar{\mathcal{T}}$ функция, $\Pi = \{\bar{\mathcal{T}}_i; i = \overline{1, n}\}$ — сеточное разбиение бруса $\bar{\mathcal{T}}$ на ячейки, мерами которых являются их евклидовы объемы $|\bar{\mathcal{T}}_i|$. Обозначим

$$M_i = \sup_{x \in \bar{\mathcal{T}}_i} \{f(x)\}, \quad m_i = \inf_{x \in \bar{\mathcal{T}}_i} \{f(x)\} \quad (5)$$

и введем в рассмотрение суммы

$$\bar{S}_\Pi(f) = \sum_{i=1}^n M_i |\bar{\mathcal{T}}_i|, \quad \underline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=1}^n m_i |\bar{\mathcal{T}}_i|, \quad (6)$$

которые называются соответственно *верхней и нижней интегральными суммами* функции f , соответствующими сеточному разбиению Π бруса $\bar{\mathcal{T}}$.

Пусть $\{\Pi\}$ — множество всех возможных сеточных разбиений бруса $\bar{\mathcal{T}}$ на ячейки $\bar{\mathcal{T}}_i$. Числа

$$\bar{\int} f dx = \inf_{\{\Pi\}} \{\bar{S}_\Pi(f)\}, \quad \underline{\int} f dx = \sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f)\} \quad (7)$$

называются соответственно *верхним и нижним интегралами Римана* функции f на брус $\bar{\mathcal{T}}$.

Определение. Функция f называется *интегрируемой по Риману на брус $\bar{\mathcal{T}}$* , если выполняется равенство

$$\bar{\int} f dx = \underline{\int} f dx, \quad (8)$$

а общее значение верхнего и нижнего интегралов называется *m -кратным интегралом Римана этой функции на брус $\bar{\mathcal{T}}$* и обозначается

$$\int_{\bar{\mathcal{T}}} f(x) dx = \iint_{\bar{\mathcal{T}}} \dots \int_{\bar{\mathcal{T}}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (9)$$

Множество всех функций f , интегрируемых по Риману на брус $\bar{\mathcal{T}}$, обозначим $R(\bar{\mathcal{T}})$.

Теорема (критерий интегрируемости). Для того чтобы ограниченная функция $f: \bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ была интегрируемой на брус $\bar{\mathcal{T}}$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \epsilon > 0$ существовало такое сеточное разбиение Π этого бруса, что $0 \leq \bar{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \epsilon$.

Сокращенно критерий интегрируемости функции f записывают следующим образом:

$$(f \in R(\bar{\mathcal{T}})) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0 \exists \Pi: 0 \leq \bar{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \epsilon).$$

1.2. Интеграл Римана как предел интегральных сумм.

Пусть $\Pi = \{\bar{\mathcal{T}}_i; i = \overline{1, n}\}$ — произвольное сеточное разбиение бруса $\bar{\mathcal{T}}$. Диаметр $d(\bar{\mathcal{T}}_i)$ ячейки $\bar{\mathcal{T}}_i$ будем называть точную верхнюю грань множества всех расстояний между ее точками. Обозначим $d(\Pi) = \max_{1 \leq i \leq n} d(\bar{\mathcal{T}}_i)$. Пусть $f: \bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция.

Возьмем произвольные точки $\xi_i \in \bar{\mathcal{T}}_i$, $i = \overline{1, n}$, и образуем интегральную сумму

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) |\bar{\mathcal{T}}_i|. \quad (1)$$

Полагаем $\lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} S_\Pi(f) \stackrel{\text{def}}{=} I$, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для всякого сеточного разбиения Π бруса $\bar{\mathcal{T}}$, для которого $d(\Pi) < \delta$, выполняется неравенство

$$|S_\Pi(f) - I| < \epsilon. \quad (2)$$

Теорема. Если: 1) при $d(\Pi) \rightarrow 0 \quad \exists \lim S_\Pi(f) = I$, то $f \in R(\overline{\mathcal{J}})$ и при этом

$$\int_{\overline{\mathcal{J}}} f(x) dx = I.$$

$$2) f \in R(\overline{\mathcal{J}}), \text{ то } \exists \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} S_\Pi(f) = \int_{\overline{\mathcal{J}}} f(x) dx.$$

Эта теорема устанавливает два эквивалентных определения интеграла Римана на брус.

1.3. Мера 0 Лебега и мера 0 Жордана.

Определение 1. Множество E точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ имеет лебегову меру 0, если $\forall \epsilon > 0$ существует такое счетное покрытие $\overline{W} = \{\overline{\mathcal{J}}_j; j \in \mathbb{N}\}$ этого множества брусами $\overline{\mathcal{J}}_j$ (счетное покрытие $W = \{\mathcal{J}_j; j \in \mathbb{N}\}$ открытыми брусами $\mathcal{J}_j$), меры которых $\mu \overline{\mathcal{J}}_j = \mu \mathcal{J}_j = |\overline{\mathcal{J}}_j|$, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\overline{\mathcal{J}}_j| < \epsilon. \quad (1)$$

Определение 2. Множество E точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ имеет жорданову меру 0, если $\forall \epsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $\overline{W} = \{\overline{\mathcal{J}}_j; j = \overline{1, n}\}$ ($W = \{\mathcal{J}_j; j = \overline{1, n}\}$) этого множества брусами $\overline{\mathcal{J}}_j$ (открытыми брусами $\mathcal{J}_j$), меры которых $|\overline{\mathcal{J}}_j|$, что

$$\sum_{j=1}^n |\overline{\mathcal{J}}_j| < \epsilon. \quad (2)$$

Из определения 2 следует, что всякое множество жордановой меры 0 имеет лебегову меру 0.

Теорема (Лебега). Пусть $f: \overline{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная на брус $\overline{\mathcal{J}}$ функция и $A \subset \overline{\mathcal{J}}$ — множество ее точек разрыва. Функция f интегрируема на брус $\overline{\mathcal{J}}$ тогда и только тогда, когда A — множество лебеговой меры 0.

1.4. Интегралы функций, заданных на произвольных множествах точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$.

Определение 1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ и $A \supset E$. Функция $\chi_E: A \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \in A \setminus E, \end{cases}$$

называется характеристической функцией множества E .

Определение 2. Пусть $E \subset \overline{\mathcal{J}} \subset \mathbb{R}^m$, где $\overline{\mathcal{J}}$ — некоторый брус, $f: \overline{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Полагаем

$$\int_E f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\overline{\mathcal{J}}} f(x) \chi_E(x) dx, \quad (1)$$

если $f \chi_E \in R(\overline{\mathcal{J}})$. При этом пишем $f \in R(E)$.

Определение 3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция $\overline{\mathcal{J}} \supset E$ — произвольный брус. Продолжим функцию f в каждую точку множества $\overline{\mathcal{J}} \setminus E$, образовав при этом функцию $F: \overline{\mathcal{J}} \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \in \overline{\mathcal{J}} \setminus E. \end{cases}$$

$$\int_E f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\overline{J}} F(x) dx. \quad (2)$$

Определение 4. Ограниченное множество E точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, граница которого имеет лебегову меру 0, называется измеримым по Жордану (или жордановым), а интеграл

$$\mu E = \int_E dx \quad (3)$$

называется в этом случае m -мерным объемом множества E .

Пересечение $E_1 \cap E_2$ и объединение $E_1 \cup E_2$ двух жордановых множеств E_1 и E_2 есть жорданово множество. Если E_1 и E_2 не пересекаются, то

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2. \quad (4)$$

Дополнение $E \setminus G$ жорданова множества G до жорданова множества $E \supset G$ есть жорданово множество, и

$$\mu(E \setminus G) = \mu E - \mu G. \quad (5)$$

1.5. Основные свойства интеграла Римана на компакте.

Пусть K — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая на этом компакте функция. Тогда:

- 1) сужение функции f на компакт $K_1 \subset K$ интегрируемо на K_1 ;
- 2) если $K = K_1 \cup K_2$, где K_1 и K_2 — компакты без общих внутренних точек, то

$$\int_K f(x) dx = \int_{K_1} f(x) dx + \int_{K_2} f(x) dx \quad (1)$$

(свойство аддитивности);

- 3) если $f_1 \in R(K)$, $f_2 \in R(K)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $(\alpha f_1 + \beta f_2) \in R(K)$ и

$$\int_K (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) dx = \alpha \int_K f_1(x) dx + \beta \int_K f_2(x) dx \quad (2)$$

(свойство линейности);

- 4) если $f_1 \in R(K)$ и $f_2 \in R(K)$, то $f_1 f_2 \in R(K)$;
- 5) если $f_1 \in R(K) \wedge f_2 \in R(K)$ и $f_1(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in K$, то

$$\int_K f_1(x) dx \leq \int_K f_2(x) dx; \quad (3)$$

- 6) если $f \in R(K)$, то $|f| \in R(K)$, и при этом

$$\left| \int_K f(x) dx \right| \leq \int_K |f(x)| dx; \quad (4)$$

- 7) если $f \in R(K)$, $g \in R(K) \wedge g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$) $\forall x \in K$, $m = \inf_{x \in K} \{f(x)\}$, $M = \sup_{x \in K} \{f(x)\}$, то существует такое $\mu \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$, что справедлива формула

$$\int_K f(x) g(x) dx = \mu \int_K g(x) dx; \quad (5)$$

если, кроме того, $f \in C(K)$, то найдется такая точка $\xi \in K$, что

$$\int_K f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_K g(x)dx \quad (6)$$

(теорема о среднем).

1.6. Приведение кратного интеграла к повторному.

Следующая теорема позволяет свести вычисление кратного интеграла к повторному интегрированию.

Теорема (Фубини). Пусть $\bar{\mathcal{T}}_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{\mathcal{T}}_2 \subset \mathbb{R}^m$ — брусы в евклидовых пространствах и $f: \bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{\mathcal{T}} = \bar{\mathcal{T}}_1 \times \bar{\mathcal{T}}_2$ — интегрируемая на брусе $\bar{\mathcal{T}}$ функция. Обозначим

$$\varphi(x) = \int_{\bar{\mathcal{T}}_2} f(x, y) dy, \quad \psi(x) = \int_{\bar{\mathcal{T}}_1} f(x, y) dy, \quad x \in \bar{\mathcal{T}}_1.$$

Тогда функции φ и ψ интегрируемы на брусе $\bar{\mathcal{T}}_1$ и при этом справедливы равенства

$$\int_{\bar{\mathcal{T}}} f(x, y) dx dy = \int_{\bar{\mathcal{T}}_1} \varphi(x) dx = \int_{\bar{\mathcal{T}}_1} \psi(x) dx, \quad (1)$$

где $\int_{\bar{\mathcal{T}}} f(x, y) dx dy$ — интеграл Римана функции f на брусе $\bar{\mathcal{T}}$.

Интегралы $\int_{\bar{\mathcal{T}}_1} \varphi(x) dx$, $\int_{\bar{\mathcal{T}}_1} \psi(x) dx$ называются повторными интегралами функции f .

Справедливы также равенства

$$\int_{\bar{\mathcal{T}}} f(x, y) dx dy = \int_{\bar{\mathcal{T}}_2} \left(\int_{\bar{\mathcal{T}}_1} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\bar{\mathcal{T}}_2} \left(\int_{\bar{\mathcal{T}}_1} f(x, y) dy \right) dx, \quad (2)$$

в которых интегралы называются повторными, взятыми в обратном порядке по сравнению с повторными интегралами (1).

Следствие 1. Если функция $y \mapsto f(x, y)$ интегрируема на брусе $\bar{\mathcal{T}}_2$, то при выполнении условий теоремы Фубини справедливо равенство

$$\int_{\bar{\mathcal{T}}} f(x, y) dx dy = \int_{\bar{\mathcal{T}}_1} \left(\int_{\bar{\mathcal{T}}_2} f(x, y) dy \right) dx. \quad (3)$$

Если, кроме того, функция $x \mapsto f(x, y)$ интегрируема на брусе $\bar{\mathcal{T}}_1$, то справедливо равенство

$$\int_{\bar{\mathcal{T}}} f(x, y) dx dy = \int_{\bar{\mathcal{T}}_1} \left(\int_{\bar{\mathcal{T}}_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\bar{\mathcal{T}}_2} \left(\int_{\bar{\mathcal{T}}_1} f(x, y) dx \right) dy, \quad (4)$$

т.е. повторные интегралы, взятые в обратном порядке по отношению друг к другу, равны между собой и каждый из них равен кратному интегралу функции f на брусе $\bar{\mathcal{T}} = \bar{\mathcal{T}}_1 \times \bar{\mathcal{T}}_2$. В частности, формула (4) справедлива в случае, когда $f \in C(\bar{\mathcal{T}})$.

Следствие 2. Пусть функция $f: \bar{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на брусе $\bar{\mathcal{T}} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$, а также на каждом из брусов $\bar{\mathcal{T}}_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_{m-2}, b_{m-2}]$, $\bar{\mathcal{T}}_2 =$

$[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{m-3}, b_{m-3}], \dots, \mathcal{T}_{m-3} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ и на сегментах $[a_j, b_j]$, $j = \overline{2, m}$.
Применив теорему Фубини $m-1$ раз, получим равенство

$$\int_{\mathcal{T}} f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_m, \quad (5)$$

посредством которого интегрирование по брусу $\mathcal{T}$ сводится к повторному интегрированию. При этом все переменные, кроме той, по которой производится интегрирование, фиксируются.

1.7. Некоторые конкретные реализации интеграла Римана на компакте.

Рассмотрим два важных случая.

1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — компакт с краем ∂K . Множество ∂K точек границы компакта K является гладкой или кусочно-гладкой кривой класса C^1 и поэтому имеет лебегову меру 0, в силу чего измеримо по Жордану.

Если $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая по Риману на множестве K функция, то ее интеграл

$$\int_K f(x) dx$$

называется *двойным интегралом* и обозначается

$$\iint_K f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Предположим, что K — выпуклое в направлении оси Oy множество, т.е. что его можно представить в виде

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}, \quad (2)$$

где y_1, y_2 — кусочно-гладкие функции. Согласно определению 3, п.1.4, и следствию 2 из теоремы Фубини, справедливо равенство (в предположении, что внутренний интеграл существует)

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (3)$$

позволяющее вычислить двойной интеграл как повторный.

Если множество K выпукло в направлении оси Ox , т.е. его можно представить в виде

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}, \quad (4)$$

где x_1, x_2 — кусочно-гладкие функции, и, кроме того, существует интеграл

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx,$$

то двойной интеграл выражается через повторный следующим образом:

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (5)$$

Если множество K выпукло, то при выполнении условий, сформулированных в следствии 2 из теоремы Фубини, справедливы одновременно равенства (3) и (5):

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (6)$$

2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ — компакт с краем ∂K , являющимся гладкой или кусочно-гладкой поверхностью класса C^1 . Если $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ — интегрируемая на компакте K функция, то ее интеграл Римана

$$\int_K f(x) dx$$

называется *тройным интегралом* функции f и обозначается

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz. \quad (7)$$

Пусть $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, где y_1, y_2, z_1, z_2 — гладкие или кусочно-гладкие функции, и двойной интеграл

$$\iint_{\substack{y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)}} f(x, y, z) dy dz$$

существует $\forall x \in [a, b]$. Применив теорему Фубини, получаем

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{\substack{y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)}} f(x, y, z) dy dz.$$

Если, кроме того, $\forall (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ существует

$$\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

то, согласно следствию 2 из теоремы Фубини, справедливо равенство

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (8)$$

Если компакт K не является выпуклым множеством, но его можно представить в виде объединения выпуклых множеств без общих внутренних точек, то следует воспользоваться свойством аддитивности кратного интеграла и представить его в виде суммы интегралов по этим множествам, заменив каждое слагаемое повторным интегралом.

1.8. Замена переменных в интеграле Римана.

Теорема. Пусть $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ — выпуклые области евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ с фиксированным базисом, $K \subset \mathcal{O}$ — компакт с краем ∂K (гиперповерхностью размерности $m-1$ класса C^1) и ξ — C^1 -дiffeоморфизм $\mathcal{O}'$ на $\mathcal{O}$. Если $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная на компакте K функция, то справедлива формула замены переменных в m -кратном интеграле Римана

$$\int_K f(x) dx = \int_{K'} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt, \quad (1)$$

Определитель матрицы Остроградского—Якоби ξ' (полной производной отображения ξ) называется *якобианом* и обозначается через $\frac{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)}$. Поскольку при замене переменной $x = \xi(t)$ имеем $x_j = \xi_j(t)$, то $\frac{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)} = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)}$, и формула (1) принимает вид

$$\int_K f(x) dx = \int_{K'} f(\xi(t)) \left| \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(t_1, t_2, \dots, t_m)} \right| dt, \quad (2)$$

в котором она обычно употребляется.

Если $\xi : (t_1, t_2) \mapsto (x, y) — C^1$ -диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$, и в плоскости xOy задана измеримая по Жордану область D , а на ее замыкании $\bar{D}$ определена непрерывная функция f , причем D является образом при отображении ξ измеримой по Жордану области D' , лежащей в плоскости $t_1O't_2$, то согласно формуле (2) имеем

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\xi_1(t_1, t_2), \xi_2(t_1, t_2)) \left| \frac{D(x, y)}{D(t_1, t_2)} \right| dt_1 dt_2. \quad (3)$$

В частности, если $p : (\rho, \varphi) \mapsto (x, y) —$ отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемое равенствами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (4)$$

которые называют *формулами перехода к полярным координатам*, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi, \quad (5)$$

поскольку $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho$. Заметим, что в формулах (3), (5) вместо областей D и D' можно взять их замыкания $\bar{D}$ и $\bar{D}'$, так как границы этих областей имеют двумерный объем 0.

Довольно часто при замене переменных в двойных интегралах переходят от декартовых координат к обобщенным полярным координатам по формулам

$$x = a\rho \cos^\alpha \varphi, \quad y = b\rho \sin^\alpha \varphi \quad (\rho > 0, 0 < \varphi < 2\pi), \quad (6)$$

где параметр α выбирается надлежащим образом. В этом случае

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = ab\alpha \rho \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\alpha-1} \varphi.$$

Пусть $p : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z) —$ отображение $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ определяемое системой

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \quad (\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (7)$$

которую называют *формулами перехода к сферическим координатам*. Предположим, что в пространстве переменных x, y, z задана измеримая по Жордану область $\mathcal{O}$, а на ее замыкании $\bar{\mathcal{O}}$ определена непрерывная функция f , причем $\mathcal{O}$ является образом при отображении p измеримой по Жордану области $\mathcal{O}'$, лежащей в пространстве переменных ρ, θ, φ . При замене переменных в интеграле

$$\iiint_{\mathcal{O}} f(x, y, z) dx dy dz$$

по формулам (7), принимая во внимание, что $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \theta$, получим

$$\iiint_{\mathcal{O}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{O}'} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi. \quad (8)$$

Иногда вместо системы (7) берут систему

$$x = a\rho \sin^\alpha \theta \cos^\beta \varphi, \quad y = b\rho \sin^\alpha \theta \sin^\beta \varphi, \quad z = c\rho \cos^\alpha \theta \quad (\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (9)$$

которую называют *формулами перехода к обобщенным сферическим координатам*. В этом случае имеем

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc\alpha\beta\rho^2 \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{2\alpha-1} \theta \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi. \quad (10)$$

В некоторых случаях при вычислении тройных интегралов удобно переходить от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z по формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (\rho > 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi) \quad (11)$$

или к обобщенным цилиндрическим координатам, полагая

$$x = a\rho \cos^\alpha \varphi, \quad y = b\rho \sin^\alpha \varphi, \quad z = z \quad (\rho > 0, \quad 0 < \varphi < 2\pi), \quad (12)$$

где параметр α выбирается надлежащим образом. В последнем случае имеем

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = ab\alpha\rho \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{\alpha-1} \varphi. \quad (13)$$

При вычислении m -кратного интеграла Римана часто оказывается полезным переход в интеграле от декартовых координат к сферическим координатам в пространстве $\mathbb{R}^m$ по формулам

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-1}, \\ x_j = \rho \cos \varphi_{j-1} \prod_{i=j}^{m-1} \sin \varphi_i, \quad j = \overline{2, m-1}, \\ x_m = \rho \cos \varphi_{m-1}, \\ (\rho > 0, \quad 0 < \varphi_1 < 2\pi, \quad 0 < \varphi_j < \pi \text{ при } j = \overline{2, m-1}). \end{cases} \quad (14)$$

Якобиан преобразования координат, задаваемого системой (14), имеет вид

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1})} = \rho^{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} \sin^{j-1} \varphi_j. \quad (15)$$

1. Вычислить интеграл $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \, dx \, dy$, рассматривая его как предел интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата $D = [0, 1] \times [0, 1]$ на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая при этом в качестве точек ξ_i правые вершины ячеек.

◀ Разбиение области интегрирования на ячейки производится прямыми $x = \frac{i}{n}$, $y = \frac{j}{n}$ ($i, j = \overline{1, n-1}$), а значение функции $f(x, y) = xy$, $(x, y) \in D$ в каждой правой вершине ячейки равно $\frac{ij}{n^2}$ ($i, j = \overline{1, n}$). Вполне очевидно, что $d(\Pi) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}. \quad \blacktriangleright$$

2. Составить нижнюю $\underline{S}_\Pi(f)$ и верхнюю $\overline{S}_\Pi(f)$ интегральные суммы для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D$, $D = [1, 2] \times [1, 3]$, разбивая прямоугольник D на ячейки прямыми $x = 1 + \frac{i}{n}$, $y = 1 + \frac{2j}{n}$ ($i, j = \overline{1, n}$). Чему равны пределы этих сумм при $n \rightarrow \infty$?

◀ Ячейки разбиения Π — прямоугольники, длина сторон которых $\frac{1}{n}$ и $\frac{2}{n}$; поэтому площадь ячейки равна $\frac{2}{n^2}$.
Рассмотрим ячейку

$$\overline{\mathcal{J}}_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + \frac{i}{n} \leq x \leq 1 + \frac{i+1}{n}, \quad 1 + \frac{2j}{n} \leq y \leq 1 + \frac{2(j+1)}{n} \right\}.$$

Так как $f(x, y)$ — квадрат расстояния точки (x, y) от начала координат, то

$$f_{\min} = f\left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{2j}{n}\right), \quad f_{\max} = f\left(1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right)$$

при $(x, y) \in \bar{\mathcal{J}}_{ij}$, в силу чего имеем

$$\underline{S}_{\Pi}(f) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i}{n}, 1 + \frac{2j}{n}\right) = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},$$

$$\overline{S}_{\Pi}(f) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i+1}{n}, 1 + \frac{2(j+1)}{n}\right) = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}.$$

Переходя к пределу, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{\Pi}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_{\Pi}(f) = 13 \frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

3. Какой знак имеет интеграл

$$I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy?$$

◀ Представим исследуемый интеграл I в виде

$$I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0}} \arcsin(x+y) dx dy + \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy = I_1 + I_2.$$

Вполне очевидно, что $I_2 > 0$. Исследуем интеграл I_1 . В точках квадрата $D = [0, 1] \times [-1, 0]$, симметричных относительно его диагонали $y = -x$, функция $f(x, y) = \arcsin(x+y)$ принимает значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку, поэтому при любом разбиении Π множества D на ячейки — квадраты $\bar{\mathcal{J}}_i$ — в каждой паре симметричных ячеек, лежащих по обе стороны диагонали, найдутся такие точки (ξ_i, η_i) , (ξ'_i, η'_i) , что $f(\xi_i, \eta_i) + f(\xi'_i, \eta'_i) = 0$. Рассмотрим такое сеточное разбиение $\Pi = \{\bar{\mathcal{J}}_i; i = \overline{1, n}\}$ на квадраты, чтобы сумма площадей ячеек, объединение которых $\bigcup_k \bar{\mathcal{J}}_k$ содержит диагональ квадрата D , была

меньше произвольного $\varepsilon > 0$. Тогда при указанном выше выборе точек (ξ_i, η_i) , (ξ'_i, η'_i) и произвольном выборе точек $(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) \in \bar{\mathcal{J}}_k$ интегральная сумма $S_{\Pi}(f)$ имеет вид

$$S_{\Pi}(f) = \sum_k f(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) |\bar{\mathcal{J}}_k|.$$

Пусть $\sup_{(x, y) \in D} |f(x, y)| = M$. Тогда справедлива оценка

$$|S_{\Pi}(f)| \leq M\varepsilon,$$

из которой следует, что $I_1 = \lim_{d(\Pi) \rightarrow 0} S_{\Pi}(f) = 0$. Поэтому $I > 0$.

При решении примера воспользовались тем, что интеграл Римана интегрируемой функции f не зависит от способа выбора точек (ξ_i, η_i) при сеточном разбиении квадрата D . ▶

4. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I = \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}.$$

◀ Площадь области интегрирования равна 200. Согласно формуле (6), п.1.5, имеем

$$I = \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}, \quad (\xi, \eta) \in D, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 10\}.$$

Принимая во внимание неравенства $100 < 100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 102$, получаем оценку $1,96 < I < 2$. ▶

5. Заменить двойной интеграл $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ соответствующими ему повторными

интегралами, если: а) D — замкнутый треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$; б) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq y\}$; в) D — компакт с краем ∂D , заданным уравнением $(x - y)^2 + x^2 = a^2$, $a > 0$.

◀ а) Если внешнее интегрирование в повторном интеграле производить по переменной x , то следует представить область интегрирования в виде $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, -\frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$. В этом случае воспользуемся свойством аддитивности двойного интеграла и формулой (3), п.1.7:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-2}^0 dx \int_{-\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Если внешнее интегрирование производить по переменной y , то, применив формулу (5), п.1.7, получим

$$I = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx.$$

б) Из представлений компакта D :

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leq y \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y - y^2} \leq x \leq \sqrt{y - y^2} \right\} \end{aligned}$$

следует, что при замене двойного интеграла повторными можно применить формулы (3) и (5), п.1.7. При этом получим

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y - y^2}}^{\sqrt{y - y^2}} f(x, y) dx.$$

в) После несложного исследования убеждаемся в том, что компакт D является выпуклым в направлении осей Ox и Oy множеством, имеющим следующие представления:

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, x - \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq x + \sqrt{a^2 - x^2} \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a\sqrt{2} \leq y \leq a\sqrt{2}, \frac{y - \sqrt{2a^2 - y^2}}{2} \leq x \leq \frac{y + \sqrt{2a^2 - y^2}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

$$I = \int_{-a}^a dx \int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-a\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y-\sqrt{2a^2-y^2}}{2}}^{\frac{y+\sqrt{2a^2-y^2}}{2}} f(x, y) dx. \blacktriangleright$$

6. Доказать формулу Дирихле

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx, \quad a > 0.$$

◀ Предположим, что повторные интегралы, равенство которых требуется доказать, существуют. Можем предположить, например, что функция f непрерывна на множестве

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq a, y \leq x \leq a\}$$

или имеет разрывы в D лишь на конечном числе гладких кривых, оставаясь ограниченной.

Рассмотрим функцию $F : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $D_1 = [0, a] \times [0, a]$, где

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in D_1 \setminus D. \end{cases}$$

Для функции F существуют повторные интегралы

$$I_1 = \int_0^a dx \int_0^a F(x, y) dy, \quad I_2 = \int_0^a dy \int_0^a F(x, y) dx.$$

Произведем разбиение Π квадрата D_1 на ячейки — прямоугольники $\overline{\mathcal{J}}_{ij}$ ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$), выберем произвольную точку $(\xi_i, \eta_j) \in \overline{\mathcal{J}}_{ij}$ и составим интегральные суммы

$$S_{\Pi}^{(1)}(F) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F(\xi_i, \eta_j) |\overline{\mathcal{J}}_{ij}|, \quad S_{\Pi}^{(2)}(F) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_j) |\overline{\mathcal{J}}_{ij}|,$$

где $|\overline{\mathcal{J}}_{ij}| = \Delta x_i \Delta y_j$. Из существования интегралов I_1, I_2 следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Rightarrow |I_1 - S_{\Pi}^{(1)}(F)| < \varepsilon \wedge |I_2 - S_{\Pi}^{(2)}(F)| < \varepsilon$. Так как $S_{\Pi}^{(1)}(F) = S_{\Pi}^{(2)}(F)$, то $I_1 = I_2$. Пусть $x \in]0, a[$. Тогда имеем

$$\int_0^a F(x, y) dy = \int_0^x F(x, y) dy + \int_x^a F(x, y) dy = \int_0^x f(x, y) dy.$$

Если $y \in]0, a[$, то получим

$$\int_0^a F(x, y) dx = \int_0^y F(x, y) dx + \int_y^a F(x, y) dx = \int_y^a f(x, y) dx.$$

Поскольку $I_1 = I_2$, то

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx. \blacktriangleright$$

Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

$$7. \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

◀ При изменении y от 0 до 1 переменная x пробегает в области интегрирования значения от $2-y$ до $1+\sqrt{1-y^2}$, в силу чего получаем повторный интеграл

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \blacktriangleright$$

$$8. \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy, \quad a > 0.$$

◀ Разобьем замкнутую область

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2a, \sqrt{2ax-x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax} \right\}$$

отрезком прямой $y = a$ на три области (рис. 1). При изменении порядка интегрирования получим сумму повторных интегралов

$$\int_0^a \left(\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx \right) dy + \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx. \blacktriangleright$$

$$9. \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

◀ Из свойства аддитивности интеграла Римана и его свойства изменять знак на противоположный при изменении направления интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy &= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy + \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \\ &= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy - \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_{\sin x}^0 f(x, y) dy. \end{aligned}$$

В каждом из интегралов, входящих в правую часть полученного равенства, изменим порядок интегрирования.

При изменении y от 0 до 1 переменная x изменяется от $\arcsin y$ до $\pi - \arcsin y$; а при изменении y от -1 до 0 переменная x изменяется от $\pi - \arcsin y$ до $2\pi + \arcsin y$, в силу чего получим разность интегралов

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx. \blacktriangleright$$

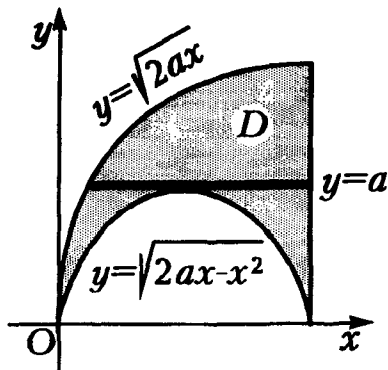


Рис. 1

В двойном интеграле $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ перейти к полярным координатам ρ и φ и расставить пределы интегрирования, если:

10. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2 (a > 0)\}$.

◀ При переходе к полярным координатам в интеграле I по формуле (5), п.1.8, переменная φ изменяется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а ρ изменяется от 0 до $a \cos \varphi$. Следовательно,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \blacktriangleright$$

11. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, \frac{x^2}{a} \leq y \leq a\}$.

◀ Отрезками лучей $y = x$ и $y = -x$, $y > 0$, разобьем область интегрирования на три множества (рис. 2): два параболических сегмента

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, \frac{x^2}{a} \leq y \leq x \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq 0, \frac{x^2}{a} \leq y \leq -x \right\}$$

и треугольник $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, |x| \leq y \leq a\}$. В силу свойства аддитивности двойного интеграла, имеем

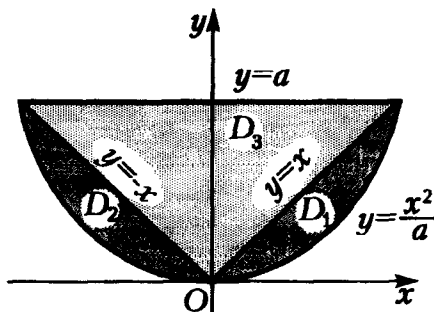


Рис. 2

$$I = \sum_{j=1}^3 \iint_{D_j} f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

В D_1 переменная φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а ρ изменяется от 0 до $\rho = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$. В D_2 имеем $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$, а в D_3 , очевидно, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$, $0 \leq \rho \leq a \operatorname{cosec} \varphi$.

Переходя к полярным координатам в каждом интеграле, входящем в сумму (1), получим

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a \operatorname{cosec} \varphi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \blacktriangleright$$

Перейти к полярным координатам в повторных интегралах, считая подынтегральную функцию непрерывной в области определения:

$$12. I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

◀ функция f непрерывна в круговом сегменте

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\},$$

поэтому повторный интеграл I равен двойному интегралу

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получаем представление множества D в виде

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi} \leq \rho \leq 1 \right\},$$

или в виде

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \rho \leq 1, \arcsin \frac{1}{\rho\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\rho\sqrt{2}} \right\}.$$

Соответственно каждому из этих представлений после замены переменных интеграл I принимает вид

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2} \operatorname{cosec}(\varphi + \frac{\pi}{4})}}^1 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \rho d\rho \int_{\arcsin \frac{1}{\rho\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\rho\sqrt{2}}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi. \blacktriangleright$$

$$13. I = \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{2}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$$

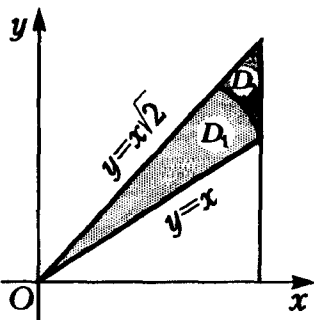


Рис. 3

Как и в предыдущем примере, повторный интеграл I равен двойному интегралу от функции $(x, y) \mapsto f(\sqrt{x^2 + y^2})$, $(x, y) \in D$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x\sqrt{2}\}$, на компакте D .

Предположим, что при переходе от декартовых координат к полярным после замены двойного интеграла повторным внешнее интегрирование производится по переменной φ . Представляя в этом случае множество D в виде

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2}, 0 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos \varphi} \right\},$$

получим

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg \sqrt{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi}} \rho f(\rho) d\rho.$$

Если при замене переменных в двойном интеграле и переходе затем к повторному интегралу внешнее интегрирование будет производиться по переменной ρ , то предварительно представим множество D в виде $D = D_1 \cup D_2$ (рис. 3), где

$$D_1 = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 2\sqrt{2} \leq \rho \leq 2\sqrt{3}, \arccos \frac{2}{\rho} \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{2} \right\},$$

и воспользуемся свойством аддитивности двойного интеграла:

$$I = \iint_{D_1} \rho f(\rho) d\rho d\varphi + \iint_{D_2} \rho f(\rho) d\rho d\varphi = \int_0^{2\sqrt{2}} \rho f(\rho) d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg \sqrt{2}} d\varphi + \int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \rho f(\rho) d\rho \int_{\arccos \frac{2}{\rho}}^{\arctg \sqrt{2}} d\varphi =$$

$$= \left(\operatorname{arctg} \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} \right) \int_0^{2\sqrt{2}} \rho f(\rho) d\rho + \int_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{3}} \rho \left(\operatorname{arctg} \sqrt{2} - \arccos \frac{2}{\rho} \right) f(\rho) d\rho. \blacktriangleright$$

14. $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, где край ∂D компакта D задан неявно уравнением $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geq 0$.

◀ Пологая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получаем уравнение края ∂D в виде $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Если после замены переменных и перехода к повторному интегралу внешнее интегрирование производится по φ , то, очевидно,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Из представления компакта D

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq a, -\frac{1}{2} \arccos \frac{\rho^2}{a^2} \leq \varphi \leq \frac{1}{2} \arccos \frac{\rho^2}{a^2} \right\}$$

следует, что интеграл I можно записать также в виде

$$I = \int_0^a \rho d\rho \int_{-\frac{1}{2} \arccos \frac{\rho^2}{a^2}}^{\frac{1}{2} \arccos \frac{\rho^2}{a^2}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi. \blacktriangleright$$

15. Считая, что ρ и φ — полярные координаты, изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, \rho) d\rho, \quad a > 0.$$

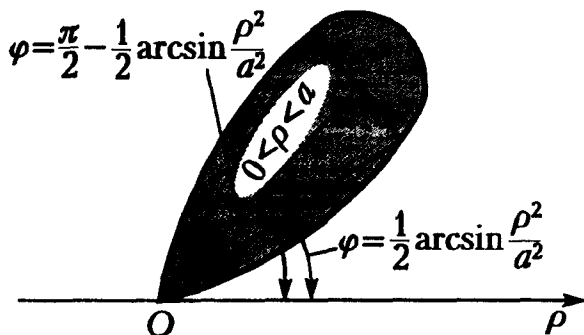


Рис. 4

◀ На рис. 4 показано, что область, в которой задана подынтегральная функция f , определяется неравенствами

$$0 \leq \rho \leq a, \quad \frac{1}{2} \arcsin \frac{\rho^2}{a^2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\rho^2}{a^2}.$$

После изменения порядка интегрирования получим интеграл

$$\int_0^a d\rho \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{\rho^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\rho^2}{a^2}} f(\varphi, \rho) d\varphi. \blacktriangleright$$

16. Квадрат $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < a + h, b < y < b + h\}$, $a > 0$, $b > 0$, посредством системы функций $u = y^2 x^{-1}$, $v = \sqrt{xy}$ преобразуется в область D' . Найти отношение площади области D' к площади области D . Чему равен предел этого отношения при $h \rightarrow 0$?

► Пусть $P_{D'}$, P_D соответственно площади областей D' и D . Под площадями открытых областей понимаем меры Жордана множеств D' и D или их замыканий. Согласно формуле замены переменной и определения жордановой меры множества, имеем

$$P_{D'} = \iint_{D'} du dv = \iint_D \left| \frac{\mathcal{D}(u, v)}{\mathcal{D}(x, y)} \right| dx dy,$$

где $\frac{\mathcal{D}(u, v)}{\mathcal{D}(x, y)} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}.$

Заменяя двойной интеграл повторным, получаем

$$P_{D'} = \frac{3}{2} \int_a^{a+h} x^{-\frac{3}{2}} dx \int_b^{b+h} y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{6}{5} \frac{(b^2 + (b+h)^2 + b(b+h) + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}) h^2}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})\sqrt{a(a+h)}}.$$

Поскольку $P_D = h^2$,

$$\frac{P_{D'}}{P_D} = \frac{6}{5} \frac{b^2 + (b+h)^2 + b(b+h) + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})\sqrt{a(a+h)}}.$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, находим

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_{D'}}{P_D} = \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}. \blacktriangleright$$

17. В интеграле $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, где край ∂D компакта D задан уравнениями

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$ ($a > 0$), произвести замену переменных по формулам $x = u \cos^4 v$, $y = u \sin^4 v$ и перейти от двойного интеграла к повторному, считая функцию f непрерывной.

► При заданном отображении имеем

$$\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u \cos^3 v \sin v \\ \sin^4 v & 4u \sin^3 v \cos v \end{vmatrix} = 4u \sin^3 v \cos^3 v,$$

в силу чего получаем

$$I = 4 \iint_{D'} f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) |u| |\sin^3 v \cos^3 v| du dv,$$

где D' — компакт, внутренние точки которого отображаются на множество всех внутренних точек компакта D .

Чтобы заменить полученный двойной интеграл повторным, найдем пределы изменения переменных u и v . При заданном отображении край компакта, заданный уравнением $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, переходит в отрезок прямой $u = a$. Если $(0, y)$ — любая точка, лежащая на отрезке оси Oy , где $0 \leq y \leq a$, то $v = \frac{\pi}{2}$. Если точка $(x, 0)$ лежит на оси Ox и $0 \leq x \leq a$, то $v = 0$. Таким образом, справедливо равенство

$$I = 4 \int_0^a u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) \sin^3 v \cos^3 v dv. \blacktriangleright$$

18. Показать, что замена переменных $x + y = \xi$, $y = \xi\eta$ переводит треугольник $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ в квадрат $D' = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$.

► Началу координат в плоскости xOy соответствует множество точек $\gamma_1 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1\}$. Если $y = 1 - x$, то $\xi = 1, \eta = 1 - x$, откуда следует, что множество

$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 1 - x\}$ отображается на множество $\gamma'_2 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$, причем при возрастании x от 0 до 1 переменная η убывает от 1 до 0. Совершенно аналогично убеждаемся в том, что множество $\gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$ отображается на множество $\gamma'_3 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq 1, \eta = 1\}$, а множество $\gamma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ — на множество $\gamma'_4 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \xi \leq 1, \eta = 0\}$. Таким образом, край компакта D отображается в край компакта D' . Осталось показать, что при заданном отображении любая внутренняя точка компакта D переходит во внутреннюю точку компакта D' . Если $0 < x < 1, 0 < y < 1 - x$, то $0 < \xi < 1, 0 < \xi(1 - \eta) < 1$, откуда следует, что $0 < \eta < 1$, т.е. что точка $(\xi, \eta) \in D'$ — внутренняя. ►

19. Пусть функция $(x, y) \mapsto f(x, y)$ непрерывна на компакте D , край которого ∂D задан уравнениями $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x$ ($x > 0, y > 0$). Посредством замены переменных свести двойной интеграл $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ к однократному.

◀ Произведем в интеграле I замену переменных по формулам $xy = u, y = vx$. Тогда $1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4$, т.е. отображение, определяемое системой $x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}, y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$, осуществляет C^1 -дiffeоморфизм квадрата $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$ на криволинейный четырехугольник D . Согласно формуле замены переменных, имеем

$$I = \iint_{D'} f(u) \left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 f(u) du \int_1^4 \frac{dv}{v} = \ln 2 \int_1^2 f(u) du.$$

Заметим, что якобиан взятого отображения легко вычислить по формуле

$$\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} = \left(\frac{\mathcal{D}(u, v)}{\mathcal{D}(x, y)} \right)^{-1} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right)^{-1} = \frac{x}{2y} = \frac{1}{2v}. \blacktriangleright$$

Вычислить двойные интегралы:

20. $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$.

◀ Переходя к полярным координатам ρ, φ , получим уравнение края ∂D компакта D в виде $\rho^4(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = 1$, откуда

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

После замены переменных и перехода от двойного интеграла к повторному получим

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}}} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^4 \varphi} d(\operatorname{tg} \varphi).$$

Полагая в интеграле $\operatorname{tg}^4 \varphi = t$, имеем

$$I = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{(1 + t^{\frac{1}{2}}) t^{-\frac{3}{4}}}{1 + t} dt = \frac{1}{4} \left(B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) + B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \right) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

21. $I = \iint_D (x + y) dx dy$, где D — компакт, край которого ∂D задан уравнениями $y^2 = 2x, x + y = 4, x + y = 12$.

◀ Решая системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y = 12, \end{cases}$$

получим соответственно $x_1 = 2$, $x_2 = 8$ и $x_1 = 8$, $x_2 = 18$. Поэтому справедливо представление $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 8, 4 - x \leq y \leq \sqrt{2x}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 8 \leq x \leq 18, -\sqrt{2x} \leq y \leq 12 - x\}.$$

Используя свойство аддитивности двойного интеграла и заменяя двойные интегралы повторными, получим

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} (x+y) dx dy + \iint_{D_2} (x+y) dx dy = \int_2^8 dx \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y) dy + \int_8^{12} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_2^8 (x+y)^2 \Big|_{y=4-x}^{y=\sqrt{2x}} dx + \frac{1}{2} \int_8^{18} (x+y)^2 \Big|_{y=-\sqrt{2x}}^{y=12-x} dx = \\ &= \int_2^8 \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{2} x^{\frac{3}{2}} + x - 8 \right) dx + \int_8^{18} \left(72 - \frac{x^2}{2} + \sqrt{2} x^{\frac{3}{2}} - x \right) dx = 543 \frac{11}{15}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$22. I = \iint_D |\cos(x+y)| dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}.$$

◀ В точках квадрата D , симметричных относительно его диагонали, определяемой уравнением $x+y=\pi$, подынтегральная функция принимает равные значения, в силу чего справедливо равенство

$$I = 2 \iint_{D'} |\cos(x+y)| dx dy,$$

где $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi - x\}$. С помощью отрезка $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, y = \frac{\pi}{2} - x\}$ разобьем множество D' на два множества, на одном из которых подынтегральная функция положительная, а на другом — отрицательная. Указанные области в полярных координатах определяются соответственно неравенствами

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2(\sin \varphi + \cos \varphi)}; \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2(\sin \varphi + \cos \varphi)} \leq \rho \leq \frac{\pi}{\sin \varphi + \cos \varphi}.$$

После перехода к полярным координатам и замены двойных интегралов повторными получим

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2(\sin \varphi + \cos \varphi)}} \rho \cos \rho(\sin \varphi + \cos \varphi) d\rho - \int_{\frac{\pi}{2(\sin \varphi + \cos \varphi)}}^{\frac{\pi}{\sin \varphi + \cos \varphi}} \rho \cos \rho(\sin \varphi + \cos \varphi) d\rho \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\sin \varphi + \cos \varphi)^2} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)} = \pi \operatorname{ctg} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = 2\pi. \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$23. I = \iint_D \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy, \text{ где } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

◀ Функция $f : (x, y) \mapsto \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2$, $(x, y) \in D$, положительна на множестве $D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right\}$ и отрицательна на множестве $D_2 = D \setminus D_1$, вследствие чего имеем

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} f(x, y) dx dy - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = - \iint_D f(x, y) dx dy + 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_D \left(x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) dx dy + 2 \iint_{D_1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right) dx dy = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

После замены переменных в интегралах I_1 и I_2 соответственно по формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $x - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \rho \cos \varphi$, $y - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \rho \sin \varphi$, получим

$$\begin{aligned} I &= - \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi + 2 \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}}} f\left(\rho \cos \varphi + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \rho \sin \varphi + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^2 - \frac{\rho}{\sqrt{2}} (\sin \varphi + \cos \varphi) \right) \rho d\rho + 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - \rho^2 \right) \rho d\rho = \frac{\pi}{2} + 4\pi \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64} \right) = \frac{9}{16} \pi. \blacktriangleright \end{aligned}$$

24. $I = \iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

◀ Выражение под знаком модуля неотрицательно на множестве $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, x^2 \leq y \leq 2\}$ и неположительно на множестве $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y < x^2\}$. Принимая во внимание, что $D = D_1 \cup D_2$, и свойство аддитивности двойного интеграла, имеем

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} \sqrt{y - x^2} dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{x^2 - y} dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy = \\ &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \left((y - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=x^2}^{y=2} + (x^2 - y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=x^2} \right) dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \left(x^2 |x| + (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx. \end{aligned}$$

Полагая в последнем интеграле $t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}$, окончательно получим

$$I = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2t + \frac{\cos 4t}{2} \right) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}. \blacktriangleright$$

Вычислить интегралы от разрывных функций:

25. $I = \iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

◀ Исходя из симметрии, следует равенство

$$I = 4 \iint_{D_1} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy,$$

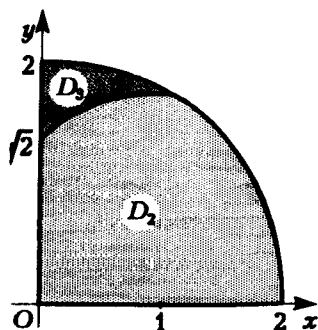


Рис. 5

где $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0, y \geq 0\}$.

Обозначим через f функцию под знаком интеграла на компакте D_1 . Эта функция разрывна в каждой точке кривой $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = \sqrt{x^2 + 2}\}$, разделяющей компакт D_1 на множества D_2 и D_3 (рис. 5), где

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \sqrt{x^2 + 2} \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\},$$

$$D_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x^2 + 2} < y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\}.$$

Поскольку $f(x, y) = 1$, если $(x, y) \in D_2$, $f(x, y) = 0$, если $(x, y) \in \gamma$, $f(x, y) = -1$, если $(x, y) \in D_3$, то

$$\begin{aligned} I &= 4 \left(\iint_{D_2} dx dy - \iint_{D_3} dx dy \right) = 4 \left(\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x^2+2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy - \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \right) = \\ &= 4 \left(\int_0^1 (2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{4-x^2}) dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx \right) = \\ &= 4 \left(\left(x\sqrt{x^2+2} + 2 \ln(x + \sqrt{x^2+2}) \right) \Big|_0^1 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt + 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \right) = \\ &= 4 \left(\sqrt{3} + 2 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{2} - 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 8 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

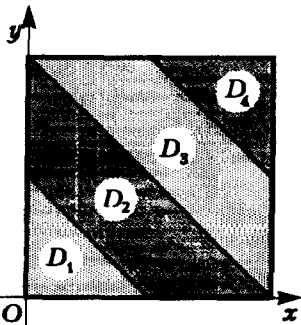


Рис. 6

(в интеграле $\int \sqrt{4-x^2} dx$ производилась замена $x = 2 \sin t$). ►

26. $I = \iint_D [x+y] dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

◀ Отрезками прямых, заданных уравнениями $x+y=j$ ($j=1, 2, 3$), разобьем компакт D на множества D_k ($k=1, 2, 3, 4$) (рис. 6). Если (x, y) — внутренняя точка множества D_k , то $[x+y] = k-1$, $k=1, 4$, в силу чего имеем

$$I = \sum_{k=1}^4 \iint_{D_k} [x+y] dx dy = \sum_{k=1}^4 (k-1) P_k = P_2 + 2P_3 + 3P_4,$$

где P_k — жорданова мера множества D_k . Поскольку $P_2 = P_3 = \frac{3}{2}$, $P_4 = P_1 = \frac{1}{2}$, то окончательно получаем

$$I = 3 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 6. \quad \blacktriangleright$$

27. $I = \iint_D \sqrt{[y-x^2]} dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$.

◀ Исходя из симметрии заключаем, что

$$I = 2 \iint_{D_1} \sqrt{[y-x^2]} dx dy,$$

где $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$. Части кривых $\gamma_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y = x^2 + j\}$, $j = 1, 2, 3$, лежащие внутри компакта D_1 , разбивают его на множества D_k ($k = \overline{1, 4}$) (рис. 7). Если (x, y) — внутренняя точка множества D_k , то $\sqrt{[y - x^2]} = \sqrt{k - 1}$, $k = \overline{1, 4}$. Из свойства аддитивности двойного интеграла следует равенство

$$I = 2 \sum_{k=1}^4 \sqrt{k-1} \iint_{D_k} dx dy = 2 \sum_{k=1}^4 \sqrt{k-1} P_k,$$

где P_k — жорданова мера множества D_k . Из представления множества D_k в виде

$$D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{4-k}, x^2 + k - 1 \leq y \leq x^2 + k\} \cup \\ \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{4-k} \leq x \leq \sqrt{4-(k-1)}, x^2 + k - 1 \leq y \leq 4\},$$

имеем

$$P_k = \int_0^{\sqrt{4-k}} dx \int_{x^2+k-1}^{x^2+k} dy + \int_{\sqrt{4-k}}^{\sqrt{5-k}} dx \int_{x^2+k-1}^4 dy = \\ = \sqrt{4-k} + (5-k)(\sqrt{5-k} - \sqrt{4-k}) - \frac{1}{3} \left((5-k)^{\frac{3}{2}} - (4-k)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Следовательно,

$$I = 2 \sum_{k=1}^4 \sqrt{k-1} P_k = 2 (P_2 + \sqrt{2} P_3 + \sqrt{3} P_4) = 2 \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3} \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \right) = \frac{4}{3} (4 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}). \blacktriangleright$$

28. Вычислить $F'(t)$, если $F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{-\frac{tx}{y^2}} dx dy.$

◀ Произведя в интеграле замену переменных по формулам $x = tu$, $y = tv$, $t > 0$, получаем $F(t) = ct^2$, где

$$c = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{-\frac{u}{v^2}} du dv.$$

Дифференцируя по t , имеем

$$F'(t) = 2ct = \frac{2}{t} \cdot ct^2 = \frac{2F(t)}{t}, \quad t > 0. \blacktriangleright$$

29. Найти $F'(t)$, если $F(t) = \iint_{D(t)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, где $D(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1, t \in \mathbb{R}\}$.

◀ Заменяя в интеграле переменные по формулам $x-t = \rho \cos \varphi$, $y-t = \rho \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, получим

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \sqrt{(t + \rho \cos \varphi)^2 + (t + \rho \sin \varphi)^2} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi, t) d\varphi,$$

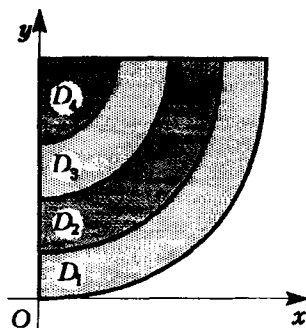


Рис. 7

где $\Phi(\varphi, t) = \int_0^1 \sqrt{(t + \rho \cos \varphi)^2 + (t + \rho \sin \varphi)^2} \rho d\rho$.

Согласно формуле Лейбница (формуле дифференцирования интеграла по параметру), имеем

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi(\varphi, t)}{\partial t} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{(t + \rho \cos \varphi) + (t + \rho \sin \varphi)}{\sqrt{(t + \rho \cos \varphi)^2 + (t + \rho \sin \varphi)^2}} \rho d\rho = \iint_{D(t)} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy. \blacktriangleright$$

30. Пусть линии уровня функции f — простые замкнутые кривые, и область $S(v_1, v_2)$ ограничена кривыми

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = v_1\}, \quad \gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = v_2\}, \quad v_1 < v_2.$$

Доказать, что

$$I = \iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv,$$

где $F(v)$ — переменная площадь фигуры, ограниченной кривой γ_1 и кривой $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = v, v_1 \leq v \leq v_2\}$.

◀ Предположим, что функция F дифференцируема на сегменте $[v_1, v_2]$. Тогда $F'(v) \geq 0 \forall v \in]v_1, v_2[$, так как F — возрастающая функция. Пусть $\Pi = \{v_1 = \bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n = v_2\}$ — произвольное разбиение сегмента $[v_1, v_2]$, где $\bar{v}_i < \bar{v}_{i+1}$, $i = 0, n-1$. Принимая во внимание неравенства $\bar{v}_i \leq f(x, y) \leq \bar{v}_{i+1}$, $(x, y) \in S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1})$ и свойство аддитивности двойного интеграла, имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \bar{v}_i \Delta S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \iint_{S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1})} f(x, y) dx dy = I \leq \sum_{i=0}^{n-1} \bar{v}_{i+1} \Delta S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}), \quad (1)$$

где $\Delta S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}) = F(\bar{v}_{i+1}) - F(\bar{v}_i)$ — площадь компакта $S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1})$. Согласно формуле конечных приращений, получаем

$$\Delta S(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}) = F'(\tilde{v}_i) \Delta \bar{v}_i, \quad \text{где } \bar{v}_i < \tilde{v}_i < \bar{v}_{i+1}.$$

Из очевидных соотношений $\bar{v}_i = \tilde{v}_i + \alpha_i^{(1)}(\Delta \bar{v}_i)$, $\bar{v}_{i+1} = \tilde{v}_i + \alpha_i^{(2)}(\Delta \bar{v}_i)$, где $\alpha_i^{(1)}$ и $\alpha_i^{(2)}$ — бесконечно малые при $\Delta \bar{v}_i \rightarrow 0$ функции, следует, что неравенства (1) можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(1)} F'(\tilde{v}_i) \Delta v_i + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{v}_i F'(\tilde{v}_i) \Delta v_i \leq I \leq \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{v}_i F'(\tilde{v}_i) \Delta \bar{v}_i + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{(2)} F'(\tilde{v}_i) \Delta \bar{v}_i.$$

После перехода к пределу в этих неравенствах получим

$$I = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv.$$

Пусть, например, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v_1 = 1$, $v_2 = 3$. Тогда $F(v) = \pi(v - 1)$, $F'(v) = \pi$,

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \pi \int_1^3 v dv = \frac{\pi}{2} v^2 \Big|_1^3 = 4\pi. \blacktriangleright$$

Вычислить следующие тройные интегралы:

$$31. I = \iiint_K \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz, \quad \text{где } \partial K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

◀ Переходя к обобщенным сферическим координатам по формулам $x = a\rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = c\rho \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и заменяя тройной интеграл повторным, получим, принимая во внимание, что $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)} = abc\rho^2 \sin \theta$,

$$I = abc \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{2}{5} \pi abc \cos \theta \Big|_\pi^0 = \frac{4}{5} \pi abc. \blacktriangleright$$

32. $I = \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

◀ Край ∂K состоит из части конической поверхности и части плоскости, заданной уравнением $z = 1$; а компакт K проектируется на круг

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Перейдем в интеграле к цилиндрическим координатам и заменим тройной интеграл повторным. Принимая во внимание, что $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho \leq z \leq 1$, $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi, z)} = \rho$, получим

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_\rho^1 dz = 2\pi \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho) d\rho = \frac{\pi}{6}. \blacktriangleright$$

33. $I = \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, где $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$.

◀ Перейдем в интеграле к сферическим координатам, приняв во внимание, что $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq \cos \theta$, $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin \theta$.

Тогда получим

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos \theta} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{10} \cos^5 \theta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{10}. \blacktriangleright$$

34. $I = \iiint_K x^2 dx dy dz$, где край ∂K компакта K задан уравнениями $z = ay^2$, $z = by^2$, $y > 0$ ($0 < a < b$), $z = \alpha x$, $z = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$), $z = h$ ($h > 0$).

◀ Представив множество K в виде

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h, \sqrt{\frac{z}{b}} \leq y \leq \sqrt{\frac{z}{a}}, \frac{z}{\beta} \leq x \leq \frac{z}{\alpha} \right\}$$

и заменяя тройной интеграл повторным, получим

$$I = \int_0^h dz \int_{\sqrt{\frac{z}{b}}}^{\sqrt{\frac{z}{a}}} dy \int_{\frac{z}{\beta}}^{\frac{z}{\alpha}} x^2 dx = \frac{1}{3} (\alpha^{-3} - \beta^{-3}) \left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \right) \int_0^h z^{\frac{7}{2}} dz = \frac{2}{27} (\alpha^{-3} - \beta^{-3}) \left(a^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \right) h^{\frac{9}{2}}. \blacktriangleright$$

35. $I = \iiint_K xyz dx dy dz$, где компакт K расположен в октанте $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

и ограничен поверхностями, заданными уравнениями $z = \frac{x^2 + y^2}{m}$, $z = \frac{x^2 + y^2}{n}$, $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y = \beta x$ ($0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$, $0 < m < n$).

◀ Произведем в интеграле замену, полагая $xy = u$, $y = vx$, $z = z$. Тогда получим

$$I = \iiint_{K'} x(u, v)y(u, v)z \left| \frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(u, v, z)} \right| du dv dz,$$

где K' — компакт, отображающийся на компакт K , причем

$$K' = \left\{ (u, v, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq u \leq b^2, \alpha \leq v \leq \beta, \frac{u(v+v^{-1})}{n} \leq z \leq \frac{u(v+v^{-1})}{m} \right\}.$$

Поскольку при указанной замене $x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}$, $y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$, $z = z$, то $\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(u, v, z)} = \frac{1}{2v}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} u du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{v} \int_{\frac{u(v+v^{-1})}{n}}^{\frac{u(v+v^{-1})}{m}} z dz = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \int_{a^2}^{b^2} u^3 du \int_{\alpha}^{\beta} \left(v + \frac{1}{v} \right)^2 \frac{dv}{v} = \\ &= \frac{1}{16} (m^{-2} - n^{-2}) (b^8 - a^8) \int_{\alpha}^{\beta} \left(v + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^3} \right) dv = \\ &= \frac{1}{16} (m^{-2} - n^{-2}) (b^8 - a^8) \left(\frac{1}{2} (\beta^2 - \alpha^2) + 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2} (\alpha^{-2} - \beta^{-2}) \right) = \\ &= \frac{1}{32} (m^{-2} - n^{-2}) (b^8 - a^8) \left((\beta^2 - \alpha^2) (1 + \alpha^{-2} \beta^{-2}) + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

36. Пользуясь теоремой о среднем, оценить интеграл

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq r^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}, \quad \text{где } a^2 + b^2 + c^2 > r^2.$$

◀ Согласно теореме о среднем для кратных интегралов, имеем

$$I = f(M) \mu K = f(M) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3,$$

где $f(M)$ — значение подынтегральной функции в некоторой точке шара $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$. Поскольку $a^2 + b^2 + c^2 > r^2$, то функция $\varphi : (x, y, z) \mapsto \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, $(x, y, z) \in K$, не принимает экстремальных значений внутри шара K , а достигает наибольшего и наименьшего значений на его крае $\partial K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Составим функцию Лагранжа

$$F(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)$$

и найдем ее экстремальные точки. Имеем

$$F'_x = \frac{x-a}{\varphi} + 2\lambda x = 0, \quad F'_y = \frac{y-b}{\varphi} + 2\lambda y = 0, \quad F'_z = \frac{z-c}{\varphi} + 2\lambda z = 0.$$

Решая полученную систему уравнений совместно с уравнением связи $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, найдем λ и точки M_1, M_2 условного экстремума функции φ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm \frac{1}{2r}, \quad M_1 = \left(\frac{ra}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{rb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{rc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right), \\ M_2 &= \left(-\frac{ra}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{rb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{rc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\varphi(M_1) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - r, \quad \varphi(M_2) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + r,$$

то справедливы неравенства $\varphi(M_1) < \varphi(M) < \varphi(M_2)$, которые можно записать как одно неравенство

$$\left| \varphi(M) - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \right| < r, \quad M \in K \setminus \partial K.$$

Обозначая $\theta = \frac{\varphi(M) - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{r}$, получим равенство $\varphi(M) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + r\theta$, где $|\theta| < 1$.

Принимая во внимание, что $f(M) = \frac{1}{\varphi(M)}$, имеем оценку

$$I = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + r\theta}, \quad |\theta| < 1. \blacktriangleright$$

37. Доказать, что если функция $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^3$ и $\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$ для любой области $\omega \subset K$, то $f(x, y, z) \equiv 0$, $(x, y, z) \in K$.

◀ Пусть P — любая внутренняя точка множества K и $S(P, \varepsilon)$ — открытый шар. По теореме о среднем и из условия задачи имеем

$$f(\bar{P}) = \frac{3}{4\pi\varepsilon^2} \iiint_{S(P, \varepsilon)} f(x, y, z) dx dy dz = 0, \quad \bar{P} \in S(P, \varepsilon).$$

Стягивая шар $S(P, \varepsilon)$ к точке P , получаем, что $f(P) = 0$. Таким образом, функция f обращается в нуль в каждой внутренней точке множества K . В силу ее непрерывности на компакте K она будет равна нулю и в точках, принадлежащих его краю ∂K . Следовательно, $f(x, y, z) \equiv 0$, если $(x, y, z) \in K$. ▶

38. Найти $F'(t)$, если:

а) $F(t) = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, где f — непрерывная функция;

б) $F(t) = \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz$, где f — дифференцируемая функция.

◀ а) Перейдя в интеграле к сферическим координатам и заменяя после этого тройной интеграл повторным, получим

$$F(t) = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2) d\rho = 4\pi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2) d\rho.$$

Дифференцируя функцию F , находим $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$.

б) Заменим тройной интеграл повторным

$$F(t) = \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t f(xyz) dz$$

и вычислим производную функции F по параметру t :

$$F'(t) = \int_0^t dy \int_0^t f(tyz) dz + \int_0^t dx \left(\int_0^t f(xtz) dz + \int_0^t f(xyt) dy \right) =$$

$$= \int_0^t dy \int_0^t f(tyz) dz + \int_0^t dx \int_0^t f(xtz) dz + \int_0^t dx \int_0^t f(xyt) dy. \quad (1)$$

Поскольку функция f дифференцируема, то можем вычислить повторный интеграл $F(t)$, применив формулу интегрирования по частям, полагая при этом $dv = dz$, $u = f(xyz)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t dx \int_0^t dy \left(z f(xyz) \Big|_{z=0}^t - \int_0^t z f'(xyz) xy dz \right) = \\ &= t \int_0^t dx \int_0^t f(xyz) dy - \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t xyz f'(xyz) dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Заменяя тройной интеграл $F(t)$ повторными

$$F(t) = \int_0^t dx \int_0^t dz \int_0^t f(xyz) dy = \int_0^t dy \int_0^t dz \int_0^t f(xyz) dx$$

и применив формулу интегрирования по частям, получим

$$F(t) = t \int_0^t dx \int_0^t f(xtz) dz - \int_0^t dx \int_0^t dz \int_0^t xyz f'(xyz) dy, \quad (3)$$

$$F(t) = t \int_0^t dy \int_0^t f(tyz) dz - \int_0^t dy \int_0^t dz \int_0^t xyz f'(xyz) dx. \quad (4)$$

Складывая левые и правые части равенств (2), (3), (4) и принимая во внимание равенство (1), имеем

$$\frac{3}{t} \left(F(t) + \int_0^t dx \int_0^t dy \int_0^t xyz f'(xyz) dz \right) = F'(t),$$

откуда получаем

$$F'(t) = \frac{3}{t} \left(F(t) + \iiint_{K(t)} xyz f'(xyz) dx dy dz \right),$$

где $K(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq z \leq t\}$. ►

39. Пусть $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на множестве $K = \{x \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_j \leq x, j = \overline{1, m}\}$. Доказать равенство

$$I(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{m-1}} f(x) dx_m = \int_0^x dx_m \int_{x_m}^x dx_{m-1} \dots \int_{x_2}^x f(x) dx_1.$$

◀ Из непрерывности функции f и теоремы Фубини следует равенство

$$I(x) = \int_K f(x) dx.$$

Представляя множество K в виде

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_m \leq x, x_{i+1} \leq x_i \leq x, i = m-1, m-2, \dots, 1\}$$

$$I(x) = \int_0^x dx_m \int_{x_m}^x dx_{m-1} \dots \int_{x_2}^x f(x) dx_1. \blacktriangleright$$

40. Доказать, что

$$I(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} f(t_1)f(t_2) \dots f(t_m) dt_m = \frac{1}{m!} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)^m,$$

где f — непрерывная функция.

◀ Запишем $I(t)$ в виде

$$I(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m$$

и обозначим

$$\varphi(t_{m-2}) = \int_0^{t_{m-2}} f(t_{m-1}) dt_{m-1} \int_0^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m.$$

Представив $\varphi(t_{m-2})$ в виде

$$\varphi(t_{m-2}) = \frac{1}{2} \int_0^{t_{m-2}} d \left(\int_0^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m \right)^2,$$

получим

$$\varphi(t_{m-2}) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{t_{m-2}} f(y) dy \right)^2.$$

Предполагая справедливым равенство

$$\varphi(t_1) = \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} f(t_m) dt_m = \frac{1}{(m-1)!} \left(\int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right)^{m-1},$$

имеем

$$I(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^t f(t_1) dt_1 \left(\int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right)^{m-1} = \frac{1}{m!} \int_0^t d \left(\int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right)^m = \frac{1}{m!} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)^m.$$

Методом математической индукции формула доказана. ▶

41. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{m-1}} x_1 x_2 \dots x_m dx_m.$$

◀ Применив формулу, доказанную в примере 40, получим

$$I = \frac{1}{m!} \left(\int_0^1 x dx \right)^m = \frac{1}{2^m m!}. \blacktriangleright$$

42. Привести к однократному интегралу m -кратный интеграл

$$I = \int_K f(\|x\|) dx,$$

где $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$, f — непрерывная функция,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|^2 \leq r^2\}.$$

◀ Произведем в интеграле замену переменных по формулам (14), п.1.8. Принимая во внимание формулу (15), п.1.8, получим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^\pi \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \dots \int_0^\pi \sin^{m-2} \varphi_{m-1} d\varphi_{m-1} \int_0^r f(\rho) \rho^{m-1} d\rho = \\ &= 2^{m-1} \pi \prod_{j=2}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j \int_0^r f(\rho) \rho^{m-1} d\rho. \end{aligned}$$

В каждом интеграле, входящем в произведение, произведем замену переменной $\sin \varphi_j = t_j^{\frac{1}{2}}$.

Тогда $d\varphi_j = \frac{1}{2} t_j^{-\frac{1}{2}} (1 - t_j)^{-\frac{1}{2}} dt_j$, в силу чего получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j &= \frac{1}{2} \int_0^1 t_j^{\frac{j}{2}-1} (1 - t_j)^{-\frac{1}{2}} dt_j = \frac{1}{2} B\left(\frac{j}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}, \\ \prod_{j=2}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j &= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2} \frac{\Gamma(1) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(2) \dots \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, \\ I &= \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^r f(\rho) \rho^{m-1} d\rho = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^r f(\rho) \rho^{m-2} d\rho^2. \end{aligned}$$

Полагая в последнем интеграле $\rho^2 = t$, имеем

$$I = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{r^2} f(\sqrt{t}) t^{\frac{m}{2}-1} dt. \blacktriangleright$$

43. Доказать равенство

$$I = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{m-1}} f(x_m) dx_m = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!} du,$$

где f — непрерывная функция.

◀ Согласно формуле, доказанной в примере 39, имеем

$$I = \int_0^x f(x_m) dx_m \int_{x_m}^x dx_{m-1} \int_{x_{m-1}}^x dx_{m-2} \dots \int_{x_3}^x dx_2 \int_{x_2}^x dx_1.$$

$$\int_{x_3}^x dx_2 \int_{x_2}^x dx_1 = \frac{(x - x_3)^2}{2},$$

то можем предположить, что справедливо равенство

$$\int_{x_{m-1}}^x dx_{m-2} \int_{x_{m-2}}^x dx_{m-3} \dots \int_{x_3}^x dx_2 \int_{x_2}^x dx_1 = \frac{(x - x_{m-1})^{m-2}}{(m-2)!}.$$

При таком предположении получаем

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^x dx_{m-1} \dots \int_{x_3}^x dx_2 \int_{x_2}^x dx_1 &= \frac{1}{(m-2)!} \int_{x_m}^x (x - x_{m-1})^{m-2} dx_{m-2} = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} (x - x_{m-1})^{m-1} \Big|_{x_{m-1}=x}^{x_{m-1}=x_m} = \frac{(x - x_m)^{m-1}}{(m-1)!}. \end{aligned}$$

Таким образом, применив метод математической индукции, имеем

$$I = \int_0^x f(x_m) \frac{(x - x_m)^{m-1}}{(m-1)!} dx_m = \int_0^x f(u) \frac{(x - u)^{m-1}}{(m-1)!} du. \triangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Приблизительно вычислить интеграл

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dx dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

разбивая область интегрирования на квадраты, вершины которых находятся в целочисленных точках, и выбирая значения подынтегральной функции в вершинах этих квадратов, наиболее удаленных от начала координат. Сравнить полученный результат с точным значением интеграла.

2. Компакт $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ разбит на конечное число квадратуемых частей K_i , $i = \overline{1, n}$, диаметром меньше чем δ каждая, без общих внутренних точек. При каком значении δ будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left| \iint_K \sin(x+y) dx dy - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \mu K_i \right| < 0,001,$$

где $(x_i, y_i) \in K_i$, μK_i — жорданова мера множества K_i ?

3. Доказать равенство

$$\iint_K P(x)Q(y) dx dy = \int_a^A P(x) dx \int_b^B Q(y) dy,$$

где $K = [a, A] \times [b, B]$, а функции P и Q непрерывны соответственно на сегментах $[a, A]$, $[b, B]$.

4. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Доказать неравенство

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

где знак равенства возможен лишь при $f(x) = \text{const.}$

5. Какой знак имеет интеграл

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy?$$

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

$$6. \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^0 f(x, y) dy. \quad 7. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

$$8. \int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy. \quad 9. \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy.$$

Ввести вместо x и y новые переменные и произвести замену переменных в следующих интегралах, предполагая, что подынтегральная функция непрерывная:

10. $I = \iint_K f(x, y) dx dy$, где: а) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$; б) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, если $x = u \cos v, y = u \sin v$.

$$11. I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq 2x}} f(x, y) dx dy, \text{ если } u = x + y, uv = y.$$

$$12. I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} f(x, y) dx dy, \text{ если } u = y + \alpha x, uv = y.$$

$$13. I = \iint_K f(x, y) dx dy, \text{ если } x = \rho \cos^3 \varphi, y = \rho \sin^3 \varphi, \text{ где}$$

$$\partial K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \right\}.$$

14. В интеграле $\iint_K f(x, y) dx dy$ край ∂K компакта K задан уравнениями $y = \alpha x, y = \beta x, x = a$ ($\alpha < \beta$). Произвести в интеграле такую замену переменных, чтобы после нее интегрирование производилось в прямоугольнике.

15. В интеграле $\iint_K f(x, y) dx dy$, где $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, произвести такую замену переменных, чтобы после нее интегрирование производилось: а) в прямоугольнике; б) в равнобедренном прямоугольном треугольнике.

Вычислить двойные интегралы:

$$16. I = \iint_{|x|+|y| \leq 1} x^2 dx dy.$$

$$17. \iint_K xy^2 dx dy, \text{ где край } \partial K \text{ компакта } K \text{ задан уравнениями } y^2 = 2px, x = \frac{p}{2} \ (p > 0).$$

18. $\iint_K \frac{dx dy}{\sqrt{2a-z}}, a > 0$, если край ∂K компакта K состоит из кратчайшей дуги окружности с центром в точке (a, a) радиуса a , касающейся осей координат и отрезков осей координат.

19. $\iint_K (x^2 + y^2) dx dy$, если K — параллелограмм со сторонами, заданными уравнениями $y = x, y = x + a, y = a$ и $y = 3a$ ($a > 0$).

20. $\iint_K y^2 dx dy$, если край ∂K компакта K состоит из отрезка оси абсцисс и одной арки циклоиды

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

$$21. \iint_K \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \text{ где } K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}.$$

$$22. \iint_K (x+y) dx dy, \text{ где } K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x + y\}.$$

Вычислить тройные интегралы:

$$23. \iiint_K xy^2 z^3 dx dy dz, \text{ где край } \partial K \text{ компакта } K \text{ задан уравнениями } z = xy, y = x, x = 1, z = 0.$$

$$24. \iiint_K \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}, \text{ где край } \partial K \text{ компакта } K \text{ задан уравнениями } x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$25. \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \text{ где край } \partial K \text{ компакта } K \text{ задан уравнениями } x^2 + y^2 = z^2, z = 1.$$

$$26. \iiint_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \text{ где край } \partial K \text{ компакта } K \text{ — поверхность в } \mathbb{R}^3, \text{ заданная уравнением } x^2 + y^2 + z^2 = z.$$

$$27. \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz, \text{ где } m, n, p \text{ — целые неотрицательные числа.}$$

Вычислить следующие m -кратные интегралы:

$$28. \int_K \|x\|^2 dx, \text{ где } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2, K = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1].$$

$$29. \int_K \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^2 dx, \text{ где } K = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1].$$

$$30. \int_K dx, \text{ где } K = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}), \sum_{i=1}^m x_i \leq a \right\}.$$

$$31. \int_K \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i} dx, K = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}), \sum_{i=1}^m x_i \leq 1 \right\}.$$

32. Доказать равенство

$$\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \dots \int_0^{x_m} f(x_{m+1}) dx_{m+1} = \frac{1}{2^m m!} \int_0^x (x^2 - u^2)^m f(u) du.$$

33. Найти потенциал на себя однородного шара радиуса r и плотности μ_0 , т.е. вычислить интеграл

$$U = \frac{\mu_0}{2} \iiint_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq r^2 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leq r^2}} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{\rho_{1,2}},$$

$$\text{где } \rho_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

§ 2. Несобственные кратные интегралы

2.1. Несобственный m -кратный интеграл Римана.

Определение 1. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^m$ называется особой точкой для интегрирования функции $f: \mathbb{R}^m \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (функции $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$), если f не ограничена в любой окрестности $S(x_0, \delta)$.

Предположим, что все особые точки функции $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ образуют замкнутое множество Z меры 0 (которое, в частности, может быть пустым). Возьмем последовательность множеств (E_n) , $n \in \mathbb{N}$, обладающих свойствами: 1) каждое множество E_n является открытым, измеримым по Жордану; 2) $\overline{E_n} \subset E_{n+1}$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}^m \setminus Z$, где $\overline{E_n}$ — замыкание множества E_n .

Такую последовательность множеств назовем допустимой для интегрирования функции f с множеством особых точек Z , или, короче, допустимой.

Пусть функция f непрерывна почти всюду в области определения, т.е. разрывна лишь на множестве лебеговой меры 0. Так как $E_n \subset E_{n+1}$ и $E_{n+1} \cap Z = \emptyset$, то у каждой точки $x \in E_n$ есть окрестность $S(x, \delta(x))$, в которой значения функции f ограничены. По теореме Гейне—Бореля, из указанного семейства окрестностей можно выбрать их конечное число $S(x_i, \delta_i)$, $i = 1, k$, покрывающих множество $\bar{E}_n$. Пусть в окрестности $S(x_i, \delta_i)$, $i = 1, k$, значения функции f ограничены числом M_i . Тогда на множестве E_n значения функции f ограничены числом $M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$. Поскольку функция f непрерывна почти всюду в области определения и ограничена на каждом множестве E_n , то ее сужение на это множество интегрируемо по Риману.

Рассмотрим последовательность m -кратных интегралов Римана

$$I_n = \int_{E_n} f(x) dx. \quad (1)$$

Определение 2. Если для произвольной допустимой последовательности множеств (E_n) последовательность интегралов Римана (I_n) имеет при $n \rightarrow \infty$ конечный предел I , не зависящий от выбора допустимой последовательности, то существует (сходится) несобственный m -кратный интеграл Римана

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx, \quad (2)$$

равный числу I . Если $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty$ или вообще не существует, то несобственный интеграл (2) не существует (расходится).

Согласно определению, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dx. \quad (3)$$

Определение 3. Несобственный интеграл (2) называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| dx. \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду и неотрицательна. Если существует такая допустимая последовательность множеств (E_n) , что последовательность (1) ограничена, то интеграл (2) сходится.

Эта теорема значительно упрощает исследование абсолютной сходимости несобственного интеграла. Для решения вопроса об абсолютной сходимости интеграла (2) достаточно исследовать на ограниченность последовательности

$$\left(\int_{E_n} |f(x)| dx \right) \quad (5)$$

для какой-нибудь одной, специально выбранной допустимой последовательности множеств (E_n) . Если при этом последовательность (5) окажется ограниченной, то несобственный интеграл (2) абсолютно сходится; если последовательность (5) не ограничена, то интеграл (4) равен $+\infty$, и интеграл (2) не является абсолютно сходящимся.

Теорема 2. Пусть функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду в области определения. Если несобственный интеграл (2) сходится абсолютно, то он сходится.

Следующая теорема сводит проблему сходимости несобственного m -кратного интеграла Римана к проблеме его абсолютной сходимости.

Теорема 3. Пусть функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна почти всюду. Если несобственный интеграл (2) сходится, то он сходится абсолютно.

2.2. Несобственный m -кратный интеграл Римана функции, заданной на подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$.

Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывная почти всюду на множестве E функция, не интегрируема по Риману в собственном смысле. Рассмотрим функцию $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, где

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^m \setminus E. \end{cases}$$

Определение. Несобственный m -кратный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} F(x) dx$$

назовем несобственным интегралом той же кратности от функции f и обозначим символом

$$\int_E f(x) dx.$$

2.3. Некоторые признаки сходимости m -кратных несобственных интегралов.

Признак 1. Если $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ почти всюду непрерывная, локально ограниченная функция и существует предел

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x)\|x\|^\alpha = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

то несобственный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx$$

сходится при $\alpha > m$.

Признак 2. Если $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — почти всюду непрерывная функция, ограниченная вне некоторой окрестности начала координат O , и существует предел

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} f(x)\|x\|^\alpha = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

то несобственный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx$$

сходится при $\alpha < m$.

Признак 3 (сравнения). Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^m$, — почти всюду непрерывные неотрицательные функции и $f(x) \leq g(x) \forall x \in E$. Тогда из сходимости интеграла

$$\int_E g(x) dx$$

следует сходимость интеграла $\int_E f(x) dx$ и из расходимости интеграла

$$\int_E f(x) dx$$

следует расходимость интеграла $\int_E g(x) dx$.

2.4. Замена переменных в несобственном m -кратном интеграле.

Теорема. Пусть ξ — C^1 -диффеоморфизм открытого множества E' евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ на открытое множество E того же пространства. Если функция $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна всюду на E , за исключением замкнутого множества точек Z меры 0, и несобственный интеграл

$$\int_E f(x) dx \quad (1)$$

существует, то интеграл

$$\int_{E'} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt \quad (2)$$

сходится и справедливо равенство

$$\int_E f(x) dx = \int_{E'} f(\xi(t)) |\det \xi'(t)| dt. \quad (3)$$

Исследовать на сходимость следующие несобственные интегралы:

44. $\iint_E \frac{\varphi(x, y)}{(x^2 + y^2)^p} dx dy$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$, $0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$.

◀ Обозначим подынтегральную функцию через f . Поскольку $\frac{m}{(x^2 + y^2)^p} \leq |f(x, y)| \leq \frac{M}{(x^2 + y^2)^p}$ и сходимость несобственного двойного интеграла эквивалентна его абсолютной сходимости, то по признаку сравнения исследуемый интеграл сходится или расходится вместе с интегралом

$$I = \int_E \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}.$$

Поскольку $\frac{1}{(x^2 + y^2)^p} = O\left(\frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{2p}}\right)$ при $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$, то, согласно признаку 1, интеграл I сходится при $2p > 2$, т.е. при $p > 1$. Поэтому исследуемый интеграл также сходится при $p > 1$. ▶

45. $I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)}.$

◀ Пусть (E_n) — допустимая последовательность областей такая, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}^2$. Возьмем такой квадрат $K_{1n} \subset E_n$, сторона которого равна $2\alpha_{1n}$, и такой квадрат $K_{2n} \supset E_n$, сторона которого равна $2\alpha_{2n}$, чтобы $\alpha_{jn} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$. Тогда справедлива оценка

$$\iint_{K_{1n}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} \leq \iint_{E_n} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} \leq \iint_{K_{2n}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)},$$

из которой следуют неравенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_{1n}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} \leq I \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_{2n}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)}.$$

Поскольку подынтегральная функция непрерывна, то

$$\iint_{K_{jn}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} = \int_{a - \alpha_{jn}}^{a + \alpha_{jn}} \frac{dx}{1 + |x|^p} \int_{b - \alpha_{jn}}^{b + \alpha_{jn}} \frac{dy}{1 + |y|^q},$$

где (a, b) — центр всех квадратов $K_{j,n}$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_{j,n}} \frac{dx dy}{(1 + |x|^p)(1 + |y|^q)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + |x|^p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1 + |y|^q}.$$

Таким образом, сходимость интеграла I эквивалентна одновременной сходимости двух одномерных несобственных интегралов, сходящихся лишь при $p > 1$ и $q > 1$. Заметим, что поскольку подынтегральная функция положительная, то исследование интеграла I достаточно провести при выборе фиксированной допустимой последовательности (E_n) . ►

$$46. I = \iint_E \frac{\varphi(x, y) dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^p}, \quad E = \mathbb{R} \times [0, 1], \quad 0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M.$$

◀ Вполне очевидно, интеграл I сходится и расходится одновременно с интегралом

$$I_1 = \iint_E \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^p} = \iint_E f(x, y) dx dy.$$

Согласно определению п.2.2, имеем

$$I_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E. \end{cases}$$

Так как функция F неотрицательна, то достаточно рассмотреть и исследовать на сходимость последовательность интегралов

$$\left(\iint_{E_n} F(x, y) dx dy \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

для одной допустимой последовательности множеств (E_n) .

Возьмем $E_n = [-n, n] \times [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда получим

$$\iint_{E_n} F(x, y) dx dy = \int_{-n}^n dx \int_0^1 \frac{dy}{(1 + x^2 + y^2)^p} = \int_0^1 dy \int_{-n}^n \frac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^p}.$$

Если $p \leq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} F(x, y) dx dy = +\infty$ и интеграл I_1 , а вместе с ним и интеграл I расходятся. При $p > 0$ справедливы оценки

$$\int_{-n}^n \frac{dx}{(2 + x^2)^p} = \int_0^1 dy \int_{-n}^n \frac{dx}{(2 + x^2)^p} \leq \int_0^1 dy \int_{-n}^n \frac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^p} \leq \int_0^1 dy \int_{-n}^n \frac{dx}{(1 + x^2)^p} = \int_{-n}^n \frac{dx}{(1 + x^2)^p}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2 + x^2)^p} \leq I_1 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^p}, \quad p > 0,$$

откуда получаем, что I_1 сходится, если $2p > 1$, т.е. если $p > \frac{1}{2}$, и расходится, если $p \leq \frac{1}{2}$. Таким образом, интеграл I сходится, если $p > \frac{1}{2}$, и расходится, если $p \leq \frac{1}{2}$. ►

$$47. I = \iint_E \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}, \quad p > 0, q > 0, \text{ где } E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\}.$$

◀ Очевидно, сходимость интеграла I эквивалентна сходимости интеграла

$$I_1 = \iint_{E'} \frac{dx dy}{x^p + y^q},$$

где $E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^p + y^q \geq 1, x > 0, y > 0\}$. Согласно определению п.2.2, имеем

$$I_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^p + y^q}, & \text{если } (x, y) \in E', \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E'. \end{cases}$$

Поскольку $F(x, y) \geq 0$, то

$$I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} F(x, y) dx dy,$$

где (E_n) — произвольная фиксированная последовательность допустимых множеств такая, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}^2$. Возьмем

$$E_n = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} < \rho < n, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Произведя в интеграле

$$I_n = \iint_{E_n} F(x, y) dx dy$$

замену переменных по формулам $x = \rho^{\frac{1}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi$, $y = \rho^{\frac{1}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi$, получим

$$I_n = \frac{2}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{p}-1} \varphi d\varphi \int_1^n \rho^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 2} d\rho = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} \left(n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1} - 1\right).$$

Следовательно, последовательность (I_n) имеет конечный предел при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 < 0$. Таким образом, интеграл I сходится, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. ▶

$$48. I = \iint_E \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 1\}.$$

◀ Заменяя в интеграле переменные по формулам $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, получим

$$I = \frac{1}{2^{1+\frac{p}{2}}} \iint_{E'} \frac{\cos \sqrt{2}v - \cos \sqrt{2}u}{u^p} du dv, \quad E' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Согласно определению п.2.2, имеем

$$I = \frac{1}{2^{1+\frac{p}{2}}} \iint_{\mathbb{R}^2} F(u, v) du dv,$$

где

$$F(u, v) = \begin{cases} \frac{\cos \sqrt{2}v - \cos \sqrt{2}u}{u^p}, & \text{если } (u, v) \in E', \\ 0, & \text{если } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus E'. \end{cases}$$

Множества $E_n = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -n < u < n, -n < v < n\}$ допустимые для интегрирования функции F , а последовательность двойных интегралов

$$I_n = \iint_{E_n} F(u, v) du dv$$

можно заменить последовательностью повторных интегралов, так как F — непрерывная функция. Таким образом,

$$I_n = \int_1^n \frac{du}{u^p} \int_{-n}^n (\cos \sqrt{2}v - \cos \sqrt{2}u) dv = \sqrt{2} \sin \sqrt{2}n \int_1^n \frac{du}{u^p} - 2n \int_1^n \frac{\cos \sqrt{2}u}{u^p} du.$$

Поскольку последовательность (I_n) не имеет предела при $n \rightarrow \infty$, то интегралы $\iint_{\mathbb{R}^2} F(u, v)$

и I расходятся. ►

49. Показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi,$$

где $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < n, |y| < n\}$, тогда как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E'_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0,$$

где

$$E'_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2n\pi\}.$$

◄ Из непрерывности функции $(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, следует равенство

$$\iint_{E_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_{-n}^n dx \int_{-n}^n \sin(x^2 + y^2) dy = 2 \int_{-n}^n \sin x^2 dx \int_{-n}^n \cos y^2 dy,$$

в силу которого получаем после перехода к пределу произведение интегралов Френеля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 dy = \pi.$$

Для проверки второго предельного соотношения достаточно перейти к полярным координатам и вычислить интеграл:

$$\iint_{\substack{0 < \rho < \sqrt{2\pi n} \\ 0 < \varphi < 2\pi}} \rho \sin \rho^2 d\rho d\varphi = 2\pi \int_0^{\sqrt{2\pi n}} \rho \sin \rho^2 d\rho = \pi \cos \rho^2 \Big|_0^{\sqrt{2\pi n}} = 0.$$

Этот пример показывает, что двойной несобственный интеграл

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

расходится. ►

50. Показать, что интеграл:

$$I = \iint_E \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1\},$$

расходится, хотя повторные интегралы

$$I_1 = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

существуют.

◀ Для доказательства первой части утверждения достаточно показать, что интеграл I абсолютно расходится, т.е. что интеграл

$$I' = \iint_E \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{|x^2 - y^2|}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{если } (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E. \end{cases}$$

расходится.

В качестве допустимой последовательности множеств E_n возьмем $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -n < x < n, -n < y < n\}$. Тогда получим, принимая во внимание, что $|x^2 - y^2| = \begin{cases} x^2 - y^2, & \text{если } x > y, \\ y^2 - x^2, & \text{если } x < y; \end{cases}$

$$\begin{aligned} I'_n &= \iint_{E_n} F(x, y) dx dy = \int_1^n dx \int_0^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy + \int_1^n dx \int_x^n \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \\ &= \int_1^n \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0}^{y=x} + \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=n}^{y=x} \right) dx = \int_1^n \left(\frac{1}{x} - \frac{n}{x^2 + n^2} \right) dx = \ln n - \frac{\pi}{4} + \arctg \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} I'_n = +\infty$, то интеграл I расходится.

Вычислим интегралы I_1 и I_2 . Имеем

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=1}^{y=+\infty} \right) dx = \int_{+\infty}^1 \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{\pi}{4}, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=+\infty}^{x=1} \right) dy = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Этот пример показывает, что существование лишь повторных интегралов не обеспечивает сходимости соответствующего двойного несобственного интеграла. ►

Вычислить следующие интегралы:

$$51. I = \iint_E \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

◀ Подынтегральная функция принимает положительные значения, поэтому достаточно вычислить интеграл

$$I' = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, & \text{если } (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E, \end{cases}$$

для любой фиксированной допустимой последовательности множеств (E_n) . Возьмем $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} < x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{n}, n = 2, 3, \dots\}$.

Тогда получим

$$I_n = \iint_{E_n} F(x, y) dx dy = \int_0^\pi d\varphi \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = 2\pi \sqrt{1-\rho^2} \Big|_{1-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} = 2\pi \left(\sqrt{1-\frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \right),$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2\pi. \blacktriangleright$$

52. $I = \iint_E \frac{dx dy}{x^4 + y^2}, E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 + 1\}.$

◀ Согласно определению п.2.2, имеем

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy,$$

где

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^4 + y^2}, & \text{если } (x, y) \in E, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus E. \end{cases}$$

Так как подынтегральная функция F неотрицательная, то достаточно вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, где

$$I_n = \iint_{E_n} F(x, y) dx dy,$$

для любой фиксированной последовательности допустимых множеств (E_n) . Возьмем $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -n < x < n, -n < y < n\}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n-1}} dx \int_{1+x^2}^n \frac{dy}{x^4 + y^2} = 2 \int_{+0}^{\sqrt{n-1}} \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2} \Big|_{y=1+x^2}^{y=n} dx = 2 \int_{+0}^{\sqrt{n-1}} \frac{1}{x^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{x^2} - \operatorname{arctg} \frac{1+x^2}{x^2} \right) dx = \\ &= \frac{2}{x} \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{x^2} - \operatorname{arctg} \frac{1+x^2}{x^2} \right) \Big|_{\sqrt{n-1}}^{+0} + 4 \int_0^{\sqrt{n-1}} \left(\frac{1}{2x^4 + 2x^2 + 1} - \frac{n}{x^4 + n^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Внеинтегральный член стремится к нулю при $x \rightarrow +0$ и при $n \rightarrow \infty$. Принимая во внимание

оценку $\int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{n}{x^4 + n^2} dx < \frac{1}{n} \int_0^{\sqrt{n-1}} dx = \frac{\sqrt{n-1}}{n}$, получаем

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{dx}{2x^4 + 2x^2 + 1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}}.$$

Представляя подынтегральную функцию в виде суммы простых дробей и интегрируя эти дроби, имеем

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{\sqrt{2}-1}x + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2 - \sqrt{\sqrt{2}-1}x + \frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \right) \right) \right) \Bigg|_0^{\sqrt{n-1}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}. \blacktriangleright$$

$$53. I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f} dx dy, \text{ где } a < 0, ac - b^2 > 0.$$

◀ Применяя известное преобразование координат по формулам $x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$, $y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$, где числа x_0, y_0, α удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0, \\ bx_0 + cy_0 + e = 0, \end{cases} \quad b \operatorname{tg}^2 \alpha - (c - a) \operatorname{tg} \alpha - b = 0,$$

квадратичную форму $\varphi = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$ приведем к каноническому виду:

$$\varphi = Ax'^2 + Cy'^2 + f',$$

где

$$A = -(a \cos^2 \alpha - 2b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha) < 0, \quad f' = \frac{\Delta}{\delta},$$

$$C = -(a \sin^2 \alpha - 2b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha) < 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0.$$

Между коэффициентами a, b, c и A, C существует следующая связь

$$AC = ac - b^2 = \delta, \quad A + C = a + c.$$

После указанной выше замены переменных интеграл I принимает вид

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{Ax'^2 + Cy'^2 + f'} dx' dy' = e^{f'} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{Ax'^2 + Cy'^2} dx' dy'.$$

В качестве допустимой последовательности множеств (E_n) выберем

$$E_n = \left\{ (x', y') \in \mathbb{R}^2 : -n < Ax'^2 + Cy'^2 < -\frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заменяя в интегралах $I_n = \iint_{E_n} e^{Ax'^2 + Cy'^2} dx' dy'$ переменные по формулам

$$x' = \frac{\rho}{\sqrt{-A}} \cos \varphi, \quad y' = \frac{\rho}{\sqrt{-C}} \sin \varphi,$$

получим, принимая во внимание, что $\frac{\mathcal{D}(x', y')}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} = \frac{\rho}{\sqrt{AC}}$:

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{AC}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{n}} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{-\rho^2} \Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \left(e^{-\frac{1}{n}} - e^{-n} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Окончательно имеем

$$I = e^{f'} \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\Delta}{\delta}}. \blacktriangleright$$

Исследовать на сходимость следующие несобственные тройные интегралы:

54. $\iiint_E \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^p} dx dy dz$, где $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$, $0 < m \leq |\varphi(x, y, z)| \leq M$.

◀ В силу оценки для функции φ и теоремы об абсолютной сходимости несобственного кратного интеграла требуется фактически исследовать на сходимость интеграл

$$I = \iiint_E \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}.$$

Поскольку подынтегральная функция под знаком интеграла положительная, то в качестве допустимой последовательности множеств (E_n) можно взять любую фиксированную последовательность, например $E_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \frac{1}{n} < x^2 + y^2 + z^2 < n\}$. В интегралах

$$I_n = \iiint_{E_n} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

перейдем к сферическим координатам по формулам

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta \quad (0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi).$$

Тогда $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} < \rho < \sqrt{n}$ и, заменив тройные интегралы повторными, получим

$$I_n = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}} \rho^{2(1-p)} d\rho = \frac{4\pi}{3-2p} \rho^{3-2p} \Big|_{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}} = \frac{4\pi}{3-2p} \left(n^{\frac{3}{2}-p} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}-p} \right).$$

Если $p > \frac{3}{2}$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{4\pi}{2p-3}$ и интеграл I сходится, а вместе с ним сходится и исследуемый интеграл. Если $p \leq \frac{3}{2}$, то исследуемый интеграл расходится. ▶

55. $\iiint_E \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \geq 1\}$, $p > 0$, $q > 0$, $r > 0$.

◀ Сходимость интеграла I эквивалентна сходимости интеграла

$$I_1 = \iiint_{E'} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad r > 0,$$

где $E' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|^p + |y|^q + |z|^r \geq 1\}$.

Согласно определению п.2.2, имеем

$$I_1 = \iiint_{\mathbb{R}^3} F(x, y, z) dx dy dz,$$

где

$$F(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}, & \text{если } (x, y, z) \in E', \\ 0, & \text{если } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus E'. \end{cases}$$

Поскольку $F(x, y, z) \geq 0$ на всем пространстве $\mathbb{R}^3$, то в качестве допустимой последовательности множеств (E_n) можно взять любую фиксированную последовательность, например, $E_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \frac{1}{n} < |x|^p + |y|^q + |z|^r < n\}$. Тогда $I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, где

$$I_n = \iiint_{E_n} F(x, y, z) dx dy dz = 8 \iiint_{E'_n} F(x, y, z) dx dy dz,$$

E'_n — вся часть множества E_n , лежащая в первом октанте. После замены переменных в интегралах I_n по формулам

$$x = \rho^{\frac{1}{p}} \sin^{\frac{2}{p}} \theta \cos^{\frac{2}{p}} \varphi, \quad y = \rho^{\frac{1}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \theta \sin^{\frac{2}{q}} \varphi, \quad z = \rho^{\frac{1}{r}} \cos^{\frac{2}{r}} \theta,$$

принимая во внимание, что

$$\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\rho, \theta, \varphi)} = \frac{4}{pq\tau} \rho^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1} \sin^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \theta \sin^{\frac{2}{q} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{p} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{r} - 1} \theta,$$

получим

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{32}{pq\tau} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{r} - 1} \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \varphi \cos^{\frac{2}{p} - 1} \varphi d\varphi \int_{1 + \frac{1}{n}}^n \rho^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 2} d\rho = \\ &= \frac{8}{pq\tau} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \frac{\rho^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1}}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1} \Bigg|_{1 + \frac{1}{n}}^n. \end{aligned}$$

Вполне очевидно, что конечный предел последовательности (I_n) существует лишь при выполнении условия $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. Тогда и исследуемый интеграл сходится при выполнении этого условия. ►

56. Доказать формулу Дирихле

$$I = \iiint_E \dots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_m^{p_m-1} dx_1 dx_2 \dots dx_m = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_m)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \dots + p_m + 1)},$$

где

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i \leq 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, m} \right\}, p_i > 0, i = \overline{1, m}.$$

◄ При $m = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} dx_1 dx_2 &= \int_0^1 x_1^{p_1-1} dx_1 \int_0^{1-x_1} x_2^{p_2-1} dx_2 = \\ &= \frac{1}{p_2} \int_0^1 x_1^{p_1-1} (1-x_1)^{p_2} dx_1 = \frac{1}{p_2} B(p_1, 1+p_2) = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2 + 1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $m = 2$ формула Дирихле справедлива. Допустим, что она справедлива для $(m-1)$ -кратного интеграла. При таком предположении получим

$$I = \int_0^1 x_m^{p_m-1} dx_m \iint_{E'} \dots \int x_1^{p_1-1} \dots x_{m-1}^{p_{m-1}-1} dx_1 \dots dx_{m-1},$$

где

$$E' = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} x_i \leq 1 - x_m, x_i \geq 0, i = \overline{1, m-1} \right\}.$$

Отображение, определяемое системой

$$x_1 = (1 - x_m)\xi_1, \quad x_2 = (1 - x_m)\xi_2, \quad \dots, \quad x_{m-1} = (1 - x_m)\xi_{m-1},$$

является C^1 -диффеоморфизмом множества

$$E'' = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{m-1} : \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i \leq 1, \xi_i \geq 0, i = \overline{1, m-1} \right\}$$

на множество E' . Принимая во внимание равенства

$$\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}{\mathcal{D}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1})} = (1 - x_m)^{m-1},$$

$$x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_{m-1}^{p_{m-1}-1} = \xi_1^{p_1-1} \xi_2^{p_2-1} \dots \xi_{m-1}^{p_{m-1}-1} (1 - x_m)^{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}-m+1},$$

в силу предположения индукции, получим

$$\begin{aligned} \iint_{E'} \dots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_{m-1}^{p_{m-1}-1} dx_1 dx_2 \dots dx_{m-1} &= \\ &= (1 - x_m)^{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}} \iint_{E''} \dots \int \xi_1^{p_1-1} \xi_2^{p_2-1} \dots \xi_{m-1}^{p_{m-1}-1} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{m-1} = \\ &= (1 - x_m)^{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}} \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_{m-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+1)}. \end{aligned}$$

Тогда интеграл I примет вид

$$\begin{aligned} I &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_{m-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+1)} \int_0^1 x_m^{p_m-1} (1 - x_m)^{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}} dx_m = \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_{m-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+1)} B(p_m, p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+1) = \\ &= \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_{m-1})\Gamma(p_m)\Gamma(p_1+\dots+p_{m-1}+1)}{\Gamma(p_1+\dots+p_{m-1}+1)\Gamma(p_1+\dots+p_m+1)} = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2) \dots \Gamma(p_m)}{\Gamma(p_1+p_2+\dots+p_m+1)}. \end{aligned}$$

Методом математической индукции формула Дирихле доказана. ►

Упражнения для самостоятельной работы

Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

$$34. I = \iint_E \frac{\varphi(x, y) dx dy}{(1-x^2-y^2)^p}, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \quad 0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M, \quad (x, y) \in E.$$

$$35. I = \iint_E \frac{\varphi(x, y) dx dy}{(x^2+xy+y^2)^p}, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}, \quad 0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M,$$

$(x, y) \in E$.

$$36. I = \iiint_E \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{((y-\varphi(x))^2 + (z-\psi(x))^2)^p}, \quad E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\},$$

$0 < m \leq |f(x, y, z)| \leq M$, $(x, y, z) \in E$, φ, ψ — непрерывные на сегменте $[0, a]$ функции.

$$37. I = \iiint_E \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}, \quad E =]0, 1[\times]0, 1[\times]0, 1[.$$

Вычислить несобственные интегралы:

$$38. I = \iint_E \frac{dx dy}{x^p y^q}, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, xy \geq 1\}, \quad p > 0, q > 0.$$

$$39. I = \iint_E \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^p}, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

$$40. I = \iint_E e^{-(x+y)} dx dy, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}.$$

$$41. I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2 + y^2) dx dy.$$

$$42. \iint_E \exp \left\{ - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right\} dx dy, \quad E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \right\}, \quad a > 0, b > 0.$$

$$43. \iint_{\mathbb{R}^2} xy \exp \left\{ - \left(\frac{x^2}{a^2} + 2\varepsilon \frac{x}{a} \frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right\} dx dy, \quad 0 < |\varepsilon| < 1.$$

$$44. \iint_E \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy, \quad E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$45. \iiint_E \frac{dx dy dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}, \quad E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

$$46. \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz.$$

$$47. \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 \text{ где } P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \text{ — положи-}$$

тельно-определенная квадратичная форма.

48. Доказать обобщенную формулу Дирихле

$$\iint_E \dots \int x_1^{p_1-1} \dots x_m^{p_m-1} dx_1 \dots dx_m = \frac{a_1^{p_1} \dots a_m^{p_m}}{\alpha_1 \dots \alpha_m} \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p_m}{\alpha_m}\right)}{\Gamma\left(\frac{p_1}{\alpha_1} + \dots + \frac{p_m}{\alpha_m} + 1\right)},$$

где $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{\alpha_i} \leq 1 \right\}, \quad a_i > 0, \alpha_i > 0, p_i > 0.$

49. Доказать формулу Лиувилля

$$\iint_E \dots \int \varphi \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) x_1^{p_1-1} \dots x_m^{p_m-1} dx_1 \dots dx_m = \frac{\Gamma(p_1) \dots \Gamma(p_m)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_m)} \int_0^1 \varphi(u) u^{p_1 + \dots + p_m - 1} du,$$

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m x_i \leq 1 \right\}, \quad p_i > 0, i = \overline{1, m},$$

в предположении абсолютной сходимости интеграла в правой части равенства.

§ 3. Приложение кратных интегралов к решению задач геометрии и физики

3.1. Вычисление меры множества, измеримого по Жордану.

Если E — жорданово множество (см. определение 4, п.1.4), то его жордановой мерой μE (или m -мерным объемом) называется интеграл

$$\mu E = \int_E dx. \quad (1)$$

При $m = 2$ жорданова мера множества называется его площадью и обозначается через P . В этом случае

$$P = \iint_E dx dy. \quad (2)$$

При $m = 3$ объем обозначают через V , а формула (1) принимает вид

$$V = \iiint_E dx dy dz. \quad (3)$$

Объемы тел, лежащих в пространстве $\mathbb{R}^3$, можно также вычислять с помощью двойных интегралов. Если

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

где D — компакт, $f \in C(D)$, то

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (4)$$

3.2. Вычисление площади куска гладкой поверхности, лежащей в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Если множество точек $S = \Phi(D)$ пространства $\mathbb{R}^3$ задано двухпараметрическим векторным уравнением

$$\Phi = \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D,$$

где D — область пространства $\mathbb{R}^2$, то S называется *многообразием* размерности $p = 2$ класса C^1 , или *гладкой поверхностью*, если компоненты отображения Φ являются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов. В каждой точке $M = (x, y, z)$ гладкой поверхности S существует касательная плоскость, определяемая векторами

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right).$$

Определение 1. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\partial \Phi}{\partial u} du, \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv$, называется *элементом площади поверхности* S и обозначается через dS .

Согласно этому, элемент площади поверхности dS определяется через определитель Грама (см. п.1.1):

$$dS = \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} du, \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv \right)},$$

$$\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} du, \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv \right) = \begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle du^2 & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle du dv \\ \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle du dv & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle dv^2 \end{vmatrix} = (EG - F^2) du^2 dv^2,$$

где $E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle$, $G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle$, $F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle$ — коэффициенты Гаусса.

Таким образом, согласно определению, имеем

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (1)$$

Если поверхность S задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, т.е.

$$\Phi = \Phi(x, y) = (x, y, z(x, y)),$$

то формула (1) принимает вид

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (2)$$

Определение 2. Площадь P куска гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ называется *интеграл*

$$P = \iint_D dS = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (3)$$

Если $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$, то формула (3) принимает вид

$$P = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (4)$$

3.3. Приложения двойных и тройных интегралов к решению задач механики.

Если x_0 и y_0 — координаты центра тяжести пластинки $D \subset \mathbb{R}^2$ и $\mu = \mu(x, y)$ — поверхностная плотность вещества пластинки, то x_0 и y_0 можно найти по формулам

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint_D x \mu(x, y) dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint_D y \mu(x, y) dx dy, \quad (1)$$

где $m = \iint_D \mu(x, y) dx dy$ — масса пластинки.

Если пластинка однородная, то $\mu(x, y)$ является константой, которую принимают равной единице.

Моменты инерции I_x, I_y пластинки D относительно осей координат Ox и Oy можно вычислить по формулам

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Центробежный момент инерции I_{xy} вычисляется по формуле

$$I_{xy} = \iint_D xy \mu(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Полагая в формулах (2) и (3) $\mu = 1$, получим геометрические моменты инерции однородной пластинки — замкнутой области D .

Если x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести тела $T \subset \mathbb{R}^3$ и $\mu = \mu(x, y, z)$ — его объемная плотность, то x_0, y_0, z_0 можно найти по формулам

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \iiint_T x \mu(x, y, z) dx dy dz, & y_0 &= \frac{1}{m} \iiint_T y \mu(x, y, z) dx dy dz, \\ z_0 &= \frac{1}{m} \iiint_T z \mu(x, y, z) dx dy dz, \end{aligned} \quad (4)$$

где $m = \iiint_T \mu(x, y, z) dx dy dz$ — масса тела.

Если тело T однородное, то в формулах (4) полагаем $\mu = 1$.

Моментами инерции тела T относительно координатных плоскостей называются соответственно интегралы

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_T z^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, & I_{yz} &= \iiint_T x^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, \\ I_{xz} &= \iiint_T y^2 \mu(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \quad (5)$$

Моментом инерции тела T относительно некоторой прямой l называется интеграл

$$I_l = \iiint_T r^2 \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad (6)$$

где r — расстояние от точки $M = (x, y, z)$ тела до прямой l . Для осей координат имеем

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz}. \quad (7)$$

Моментом инерции тела T относительно начала координат называется интеграл

$$I_0 = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz. \quad (8)$$

Из формул (5) получаем

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}. \quad (9)$$

Ньютоновым потенциалом, или **потенциалом поля тяготения тела** T в точке $P = (x, y, z)$ называется интеграл

$$u(x, y, z) = \iiint_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}, \quad (10)$$

где $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ — объемная плотность тела, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Материальная точка массы m притягивает тело T с силой F , проекции которой F_x, F_y, F_z на оси координат Ox, Oy и Oz выражаются формулами

$$\begin{aligned} F_x &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma m \iiint_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \\ F_y &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma m \iiint_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \\ F_z &= \gamma m \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma m \iiint_T \mu(\xi, \eta, \zeta) \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (11)$$

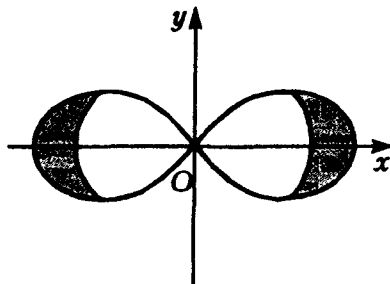


Рис. 8

где γ — гравитационная постоянная.

Найти площади плоских фигур D , края которых заданы уравнениями:

57. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 = a^2$ ($x^2 + y^2 \geq a^2$).

◀ Перейдя к полярным координатам ρ и φ , получим уравнения края компакта D в виде $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ и $\rho^2 = a^2$. Требуется вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной частью лемнискаты Бернулли и частью окружности радиуса a , лежащей вне круга радиуса a (рис. 8). Легко убедиться в том, что точка $(a, \frac{\pi}{6})$ является одной из четырех точек пересечения лемнискаты с окружностью. Принимая во внимание симметрию фигуры, площадь которой требуется найти, приходим к выводу, что искомая площадь равна учетверенной площади фигуры

$$D_1 = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \rho \leq a\sqrt{2 \cos 2\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \right\}.$$

Согласно формуле (2), п.3.1, имеем

$$P = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2 \cos 2\varphi}} \rho d\rho = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos 2\varphi - 1) d\varphi = 2a^2 (\sin 2\varphi - \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2. \blacktriangleright$$

58. $(x - y)^2 + x^2 = a^2$, $a > 0$.

◀ Для вычисления площади P плоской фигуры воспользуемся решением примера 5, в), полагая там $f(x, y) = 1$. При этом получим

$$P = \int_{-a}^a dx \int_{x - \sqrt{a^2 - x^2}}^{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dy = 2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Полагая в интеграле $t = \arcsin \frac{x}{a}$, имеем

$$P = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2a^2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2. \blacktriangleright$$

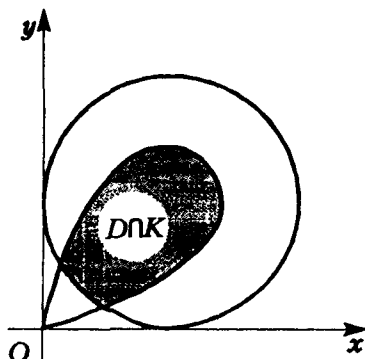


Рис. 9

$$59. (x^2 + y^2)^2 = 8a^2 xy, (x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2 \\ (a > 0, (x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2).$$

« Требуется вычислить площадь общей части круга $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2\}$ и компакта $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 8a^2 xy\}$. Пересечение этих множеств $D \cap K$ лежит в первом квадранте плоскости xOy (рис. 9). Переходя к полярным координатам, получим представление множества $D \cap K$ в виде

$$D \cap K = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : a \left((\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{\sin 2\varphi} \right) \leq \right. \\ \left. \leq \rho \leq 2a \sqrt{\sin 2\varphi}, \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \right\}.$$

Принимая во внимание симметрию точек множества $D \cap K$ относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$, получим

$$P = \iint_{D \cap K} dx dy = 2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{a((\sin \varphi + \cos \varphi) - \sqrt{\sin 2\varphi})}^{2a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2 \sin 2\varphi + 2(\sin \varphi + \cos \varphi) \sqrt{\sin 2\varphi} - 1 \right) d\varphi = \\ = a^2 \left(\cos \left(\arcsin \frac{1}{8} \right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \right) + 2a^2 \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin \varphi + \cos \varphi) \sqrt{\sin 2\varphi} d\varphi.$$

Принимая во внимание равенства

$$\cos \left(\arcsin \frac{1}{8} \right) = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \quad -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{8} \right) = -\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8}$$

и произведя в интеграле замену переменной $\varphi + \frac{\pi}{4} = t$, получим

$$P = a^2 \left(\frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} + 2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cos 2t} \sin t dt \right).$$

Вычислим

$$I = 2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cos 2t} \sin t dt = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{1}{2} \arccos \left(-\frac{1}{8} \right)} \sqrt{1 - (\sqrt{2} \cos t)^2} d(\sqrt{2} \cos t).$$

После замены переменной $\sqrt{2} \cos t = \sin z$ имеем

$$I = 2 \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}} \cos^2 z dz = \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{7}}{8}.$$

Таким образом,

$$P = a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right).$$

Обозначив $\arcsin \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} = \alpha$, получим

$$\sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{7}}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{8}, \quad \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

Окончательно имеем

$$P = a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} \right). \blacktriangleright$$

$$60. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}, \quad a > 0, b > 0, h > 0, k > 0.$$

◀ Записав уравнение края ∂D компакта $D \subset \mathbb{R}^2$ в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{2h} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{b}{2k} \right)^2 = \frac{a^2}{4h^2} + \frac{b^2}{4k^2}$$

и произведя в двойном интеграле

$$P = \iint_D dx dy$$

замену переменных по формулам

$$\frac{x}{a} - \frac{a}{2h} = \rho \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} - \frac{b}{2k} = \rho \sin \varphi,$$

а также принимая во внимание, что

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = ab\rho, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}},$$

получим

$$P = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}}} \rho d\rho = \frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \blacktriangleright$$

$$61. \quad \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}, \quad x = 0, y = 0 \quad (a > 0, b > 0, h > 0, k > 0).$$

◀ Плоская фигура, площадь которой требуется вычислить, лежит в первом квадранте. Перейдем к обобщенным полярным координатам по формулам

$$x = a\rho \cos^{\frac{2}{3}} \varphi, \quad y = b\rho \sin^{\frac{2}{3}} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тогда уравнения границы фигуры примут вид

$$\rho = \frac{a^2}{h^2} \cos^{\frac{4}{3}} \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^{\frac{4}{3}} \varphi \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right), \quad \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2},$$

а якобиан $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}$ будет равен $\frac{2}{3} ab\rho \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi$.

После замены переменных в интеграле $\iint_D dx dy$ и замены двойного интеграла повторным получим

$$P = \frac{2}{3} ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi d\varphi \int_0^{\frac{a^2}{h^2} \cos^{\frac{4}{3}} \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^{\frac{4}{3}} \varphi} \rho d\rho = \frac{ab}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^{\frac{4}{3}} \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^{\frac{4}{3}} \varphi \right)^2 d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ab}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a^4}{h^4} \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi \cos^{\frac{7}{3}} \varphi + \frac{b^4}{k^4} \sin^{\frac{7}{3}} \varphi \cos^{-\frac{1}{3}} \varphi + \frac{2a^2b^2}{h^2k^2} \sin \varphi \cos \varphi \right) d\varphi = \\
&= \frac{ab}{3} \left(\frac{a^2b^2}{h^2k^2} + \frac{a^4}{2h^4} B\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) + \frac{b^4}{2k^4} B\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) \right) = \frac{ab}{3} \left(\frac{a^2b^2}{h^2k^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right) B\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right) \right) = \\
&= \frac{ab}{3} \left(\frac{a^2b^2}{h^2k^2} + \frac{1}{6} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) \right) = \frac{ab}{3} \left(\frac{a^2b^2}{h^2k^2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4} \right) \right). \blacktriangleright
\end{aligned}$$

62. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$.

◀ В интеграле

$$P = \iint_D dx dy$$

произведем замену переменных по формулам

$$x = a\rho \cos^2 \varphi, \quad y = b\rho \sin^2 \varphi.$$

Тогда уравнение кривой, являющейся частью края компакта D , примет вид

$$\rho = \sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} - \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}, \quad \text{где} \quad \frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} - \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2} \geq 0.$$

Из условий $x \geq 0$, $y \geq 0$, $|\operatorname{tg} \varphi| \leq \sqrt{\frac{ak}{bh}}$ имеем $0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}$. После замены переменных перейдем от двойного интеграла к повторному. При этом получим

$$\begin{aligned}
P &= 2ab \int_0^{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2 \cos^4 \varphi}{h^2} - \frac{b^2 \sin^4 \varphi}{k^2}}} \rho d\rho = \\
&= ab \int_0^{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}} \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^5 \varphi \sin \varphi - \frac{b^2}{k^2} \sin^5 \varphi \cos \varphi \right) d\varphi = \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^6 \varphi + \frac{b^2}{k^2} \sin^6 \varphi \right) \Big|_{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}}}^0 = \\
&= \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} \left(1 - \cos^6 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}} \right) \right) - \frac{b^2}{k^2} \sin^6 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ak}{bh}} \right) \right) = \frac{a^4 bk(ak + 2bh)}{6h^2(ak + bh)^2}
\end{aligned}$$

(так как $\cos(\operatorname{arctg} \alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\sin(\operatorname{arctg} \alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$). $\blacktriangleright$

63. $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $x^3 = cy^2$, $x^3 = dy^2$ ($0 < a < b$, $0 < c < d$).

◀ Из уравнений границы области видно, что она лежит в первом квадранте. Заменяя в интеграле

$$P = \iint_D dx dy$$

переменные по формулам $x^2 = uy$, $x^3 = vy^2$, получим

$$a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d, \quad x = u^2 v^{-1}, \quad y = u^3 v^{-2}, \quad \left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} \right| = u^4 v^{-4},$$

$$P = \iint_{\substack{a \leq u \leq b \\ c \leq v \leq d}} u^4 v^{-4} du dv = \int_a^b u^4 du \int_c^d v^{-4} dv = \frac{1}{15} (b^5 - a^5) (c^{-3} - d^{-3}). \blacktriangleright$$

$$64. y = ax^p, y = bx^p, y = cx^q, y = dx^q \quad (0 < p < q, 0 < a < b, 0 < c < d).$$

◀ Запишем уравнения края компакта D в виде $y = ax^p, y = bx^p, x = c^{-\frac{1}{q}} y^{\frac{1}{q}}, x = d^{-\frac{1}{q}} y^{\frac{1}{q}}$ и в интеграле

$$P = \iint_D dx dy$$

произведем замену переменных по формулам $y = ux^p, x = vy^{\frac{1}{q}}$, задающим взаимно однозначное соответствие между точками прямоугольника

$$D' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : a \leq u \leq b, d^{-\frac{1}{q}} \leq v \leq c^{-\frac{1}{q}} \right\}$$

и компакта D . Поскольку $x = u^{\frac{1}{q-p}} v^{\frac{q}{q-p}}, y = u^{\frac{p}{q-p}} v^{\frac{pq}{q-p}}, \left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} \right| = \frac{q}{q-p} u^{\frac{p+1}{q-p}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}}$, то

$$P = \frac{q}{q-p} \int_a^b u^{\frac{p+1}{q-p}} du \int_{d^{-\frac{1}{q}}}^{c^{-\frac{1}{q}}} v^{\frac{p(q+1)}{q-p}} dv = \frac{q-p}{(p+1)(q+1)} \left(b^{\frac{q+1}{q-p}} - a^{\frac{q+1}{q-p}} \right) \left(c^{-\frac{p+1}{q-p}} - d^{-\frac{p+1}{q-p}} \right). \blacktriangleright$$

$$65. \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 4, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, 8\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, x > 0, y > 0.$$

◀ В интеграле $P = \iint_D dx dy$ заменим переменные согласно формулам $x = a\rho \cos^3 \varphi, y = b\rho \sin^3 \varphi$. Тогда

$$\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} = 3ab\rho \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \quad 1 \leq \rho \leq 8, \quad \arctg 1 \leq \varphi \leq \arctg 2,$$

$$\begin{aligned} P &= 3ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_1^8 \rho d\rho = \frac{189}{2} ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{189}{8} ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{189}{16} ab \int_{\arctg 1}^{\arctg 2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{189}{16} ab \left(\arctg 2 - \arctg 1 - \sin \varphi \cos \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Big|_{\arctg 1}^{\arctg 2} \right) = \frac{189}{16} ab \left(\arctg \frac{1}{3} + \frac{6}{25} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

66. Найти площадь области D , ограниченной эллипсом, заданным уравнением $(a_1 x + b_1 y + c_1)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2)^2 = 1$, где $\delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

◀ В интеграле $P = \iint_D dx dy$ произведем замену переменных по формулам $a_1 x + b_1 y + c_1 = u, a_2 x + b_2 y + c_2 = v$, отображающим круг $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ на область D . Используя известное свойство якобиана, выраженное формулой $\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} = \frac{1}{\mathcal{D}(u, v)}$, получаем,

что $\left| \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)} \right| = \frac{1}{|\delta|}$. Таким образом, имеем $P = \frac{1}{|\delta|} \iint_{D'} du dv = \frac{\pi}{|\delta|}$. $\blacktriangleright$

Применяя формулу (4), п. 3.1, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

67. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

◀ Тело T , объем V которого требуется вычислить, представляет собой замкнутое множество

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

Согласно формуле (4), п.3.1, имеем

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

Следовательно,

$$V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \int_{-1}^1 \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{88}{105}. \blacktriangleright$$

68. $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.

◀ Поверхность $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$ пересекается с плоскостью $\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ по кривой, уравнение проекции которой на плоскость xOy имеет вид $y = \frac{1-x}{1+x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Поэтому множество D в формуле (4), п.3.1, представляет собой замкнутый треугольник $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$, который запишем в виде $D = D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1-x}{1+x} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \frac{1-x}{1+x} \leq y \leq 1-x \right\}.$$

На множестве D_1 функция f в формуле (4), п.3.1, имеет вид $f(x, y) = xy$, а на множестве D_2 $f(x, y) = 1 - (x + y)$. Представив интеграл

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

в виде суммы интегралов по множествам D_1 и D_2 и перейдя от двойных интегралов к повторным, получим

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y dy + \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^2 - 3x + 4 - \frac{4}{1+x} \right) dx = \frac{17}{12} - 2 \ln 2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

69. $z^2 = xy$, $x^2 + y^2 = a^2$.

◀ Тело ограничено сверху и снизу относительно плоскости xOy конической поверхностью $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = xy\}$, а с боков — цилиндрической поверхностью $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2, z \in \mathbb{R}\}$. В силу симметрии точек тела относительно плоскостей, заданных уравнениями $z = 0$, $z = x + y$, можем вычислить значение $\frac{1}{4}$ части объема V и умножить

полученный результат на 4. При этом множеством D в формуле (4), п.3.1, является $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. Таким образом, имеем

$$V = 4 \iint_D \sqrt{xy} \, dx \, dy.$$

Переходя в интеграле к полярным координатам и заменяя двойной интеграл повторным, находим

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \varphi \, d\varphi \int_0^a \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} a^3 B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4a^3}{3\sqrt{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

70. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

◀ Тело ограничено сверху параболоидом вращения $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$, снизу — плоскостью xOy , извне — цилиндрической поверхностью $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}\}$, изнутри — цилиндрической поверхностью $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z \in \mathbb{R}\}$. Эти цилиндрические поверхности вырезают из плоскости xOy замкнутую область D , которая в полярной системе координат определяется неравенствами $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos \varphi \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$. Согласно формуле (4), п.3.1, имеем

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \rho^3 \, d\rho = \frac{15}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{15}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{15}{4} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{45}{32} \pi. \blacktriangleright \end{aligned}$$

71. $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.

◀ Параболоид вращения и плоскость пересекаются по кривой, уравнение проекции которой на плоскость xOy имеет вид $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. Поэтому тело T является множеством:

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}, x^2 + y^2 \leq z \leq x + y \right\},$$

а формула (4), п.3.1, запишется в виде

$$V = \iint_D (x + y - x^2 - y^2) \, dx \, dy, \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Заменяя в интеграле переменные по формулам $x - \frac{1}{2} = \rho \cos \varphi$, $y - \frac{1}{2} = \rho \sin \varphi$, получаем

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\rho}{2} - \rho^3\right) d\rho = \frac{\pi}{8}. \blacktriangleright$$

$$72. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (z > 0, a > 0, b > 0, c > 0).$$

◀ Тело ограничено конической поверхностью и поверхностью эллипсоида. Коническая поверхность вырезает из поверхности эллипсоида кусок, проекция которого на плоскость xOy ограничена кривой $\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2} \right\}$. Из геометрических соображений и формулы (4), п.3.1, заключаем, что искомый объем тела может быть найден с помощью интеграла

$$V = \iint_D (z_1(x, y) - z_2(x, y)) dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{1}{2} \right\},$$

где

$$z_1(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad z_2(x, y) = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Переходя в интеграле к обобщенным полярным координатам по формулам $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$, получим

$$V = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\rho\sqrt{1 - \rho^2} - \rho^2 \right) d\rho = \frac{2}{3}\pi abc \left((1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} + \rho^3 \right) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{3} abc (2 - \sqrt{2}). \blacktriangleright$$

$$73. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0, y = 0, z = 0 \quad (a > 0, b > 0).$$

◀ Если $z = 0$, то $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1$, т.е. $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Требуется вычислить объем тела

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a}\right), 0 \leq z \leq c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2} \right\}.$$

В интеграле

$$V = c \iint_D \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2} dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right\}$$

произведем замену переменных по формулам $x = a\rho \cos^2 \varphi$, $y = b\rho \sin^2 \varphi$. Принимая во внимание равенство $\frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi)} = 2ab\rho \sin \varphi \cos \varphi$, а также пределы изменения φ и ρ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 1$), получим

$$V = 2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^1 \rho \sqrt{1 - \rho^2} d\rho = \frac{abc}{3} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{abc}{3}. \blacktriangleright$$

$$74. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

◀ Тело ограничено частью поверхности эллипсоида и частью цилиндрической поверхности, вырезающей из плоскости xOy замкнутую область

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

Принимая во внимание симметрию точек тела относительно координатных плоскостей, а также симметрию точек области D относительно осей Ox и Oy , можем вычислить величину V объема тела по формуле

$$V = 8c \iint_{D_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \quad D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \leq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

После замены переменных по формулам $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$ находим

$$\begin{aligned} V &= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho \sqrt{1 - \rho^2} d\rho = \frac{8}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\sqrt{\cos 2\varphi}}^0 d\varphi = \frac{8}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sqrt{2} \sin^3 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{8}{3} abc \left(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 \varphi - 1) d(\cos \varphi) \right) = \frac{8}{3} abc \left(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2} \left(\frac{\cos^3 \varphi}{3} - \cos \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \\ &= \frac{2}{9} abc (3\pi + 20 - 16\sqrt{2}). \blacktriangleright \end{aligned}$$

75. $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$.

◀ Тело T , объем которого требуется вычислить, представим в виде $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq xy\}$, где D — криволинейный четырехугольник, край которого задан уравнениями $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$.

В интеграле

$$V = \iint_D xy dx dy$$

заменим переменные по формулам $x^2 = uy$, $y^2 = vx$, отображающим квадрат $D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}$ на множество D . Тогда $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{3}$,

$$V = \frac{1}{3} \iint_{D'} uv du dv = \frac{1}{3} \int_1^2 u du \int_1^2 v dv = \frac{3}{4}. \blacktriangleright$$

76. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($n > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

◀ Требуется вычислить объем тела

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq c \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)} \right\},$$

где $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \sqrt[n]{1 - \frac{x^n}{a^n}} \right\}$. Согласно формуле (4), п.3.1, имеем

$$V = c \iint_D \sqrt[n]{1 - \frac{x^n}{a^n} - \frac{y^n}{b^n}} dx dy.$$

Полагая в интеграле $x = a\rho \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$, $y = b\rho \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$, получим

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \frac{2}{n} ab\rho \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi.$$

$$V = \frac{2}{n} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \int_0^1 \rho \sqrt[n]{1-\rho^n} d\rho = \frac{abc}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \int_0^1 \rho \sqrt[n]{1-\rho^n} d\rho.$$

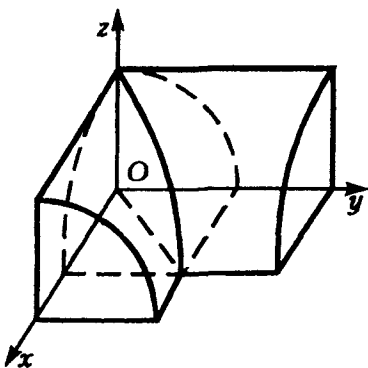


Рис. 10

В интеграле $I = \int_0^1 \rho \sqrt[n]{1-\rho^n} d\rho$ заменим переменную по формуле $\rho = t^{\frac{1}{n}}$. Тогда

$$I = \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{2}{n}-1} (1-t)^{\frac{1}{n}} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right).$$

Окончательно имеем

$$V = \frac{abc}{n^2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) B\left(\frac{2}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{abc}{3n^2} \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

Применяя формулу (4), п.3.2, найти:

77. Площадь поверхности тела, ограниченного полыми цилиндрами

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = a^2, y \in \mathbb{R}\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = a^2, x \in \mathbb{R}\}.$$

◀ Из рис. 10 видно, что $\frac{1}{16}$ часть поверхности тела, образованного в результате пересечения двух цилиндров, проектируется в плоскости xOy на множество

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x\},$$

поэтому

$$P = 16 \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy,$$

где $z = \sqrt{a^2 - x^2}$. Поскольку $1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, то

$$P = 16a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^x dy = 16a \int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 16a \sqrt{a^2 - x^2} \Big|_a^0 = 16a^2.$$

78. Площадь части сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, заключенной внутри цилиндрической поверхности

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z \in \mathbb{R} \right\}, \quad b \leq a.$$

◀ Цилиндрическая поверхность, пересекаясь со сферой, вырезает из нее симметричные относительно плоскости xOy куски, каждый из которых рассекается координатными плоскостями xOz и yOz на четыре равные части. При $z \geq 0$ имеем

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad 1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Согласно формуле (4), п.3.2, получаем

$$P = 8a \iint_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 8a \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= 8a \int_0^a \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) \Big|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx = 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}. \blacktriangleright$$

79. Площадь части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 2xy\}$, отсекаемой плоскостями, заданными уравнениями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

« Дифференцируя левую и правую части равенства $z^2 = 2xy$, получаем $z dz = y dx + x dy$, откуда $z'_x = \frac{y}{z}$, $z'_y = \frac{x}{z}$, $1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{(x+y)^2}{z^2} = \frac{(x+y)^2}{2xy}$.

Принимая во внимание, что точки поверхности S симметричны относительно плоскости xOy и что верхняя ее часть относительно этой плоскости проектируется на множество $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$, находим

$$P = 2 \iint_D \frac{x+y}{\sqrt{2xy}} dx dy = \sqrt{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \right) dy =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right) dx = 2\sqrt{2} \left(B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \right) =$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} + \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} \right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

80. Площадь части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, заключенной внутри полого цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2x, z \in \mathbb{R}\}$.

« Поверхность, площадь которой требуется определить, вырезается цилиндром S_1 из конической поверхности S . Цилиндр S_1 пересекается с плоскостью xOy по окружности $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, которая является краем компакта D — круга радиуса 1 с центром в точке $(1, 0)$. На поверхности S имеем $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, поэтому $z'_x = \frac{x}{z}$, $z'_y = \frac{y}{z}$, $1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} = 2$. Следовательно, $P = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \pi\sqrt{2}$. $\blacktriangleright$

81. Площадь части S_1 поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 - y^2}\}$, заключенной внутри полого цилиндра

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), z \in \mathbb{R}\}.$$

« Цилиндр S_2 вырезает из конической поверхности S симметричные относительно плоскости yOz и равные между собой куски, а $\frac{1}{4}$ часть поверхности S_1 проектируется в плоскость xOy на замкнутую область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2), x \geq 0, y \geq 0\}$. Поскольку для рассматриваемого случая $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{\sqrt{2}|x|}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, то

$$P = 4\sqrt{2} \iint_D \frac{x dx dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

После перехода в интеграле к полярным координатам получим

$$P = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 2\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - (\sqrt{2} \sin \varphi)^2} d(\sqrt{2} \sin \varphi).$$

Полагая в последнем интеграле $\sqrt{2} \sin \varphi = t$, имеем

$$P = 2a^2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi a^2}{2}.$$

82. Площадь части S_1 поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\}$, вырезанной плоскостями, заданными уравнениями $x - y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$.

◀ Четвертая часть поверхности S_1 проектируется в плоскость xOy на замкнутую область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Поскольку $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, то

$$P = 4 \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

Переходя в интеграле к полярным координатам, получим

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}} \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}} \right) d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(1 + \frac{1}{2 \sin^2(\varphi + \frac{\pi}{4})} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\varphi = -\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\operatorname{cosec}^2(\varphi + \frac{\pi}{4})}{2} \right)^{\frac{3}{2}} d\varphi = \\ &= -\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 + \operatorname{ctg}^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right)^{\frac{3}{2}} d\varphi. \end{aligned}$$

Полагая в интеграле $\operatorname{ctg}(\varphi + \frac{\pi}{4}) = t$, имеем

$$P = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} I, \quad \text{где} \quad I = \int_{-1}^1 \frac{(3 + t^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + t^2} dt.$$

Для вычисления интеграла I представим его в виде

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{2}{1 + t^2} \right) \sqrt{3 + t^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{3 + t^2} dt + 2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3 + t^2}}{1 + t^2} dt = \\ &= \left(\frac{t}{2} \sqrt{3 + t^2} + \frac{3}{2} \ln(t + \sqrt{3 + t^2}) \right) \Big|_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{3 + t^2}} + 4 \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1 + t^2)\sqrt{3 + t^2}} = \\ &= 2 + \frac{3}{2} \ln 3 + 2 \ln(t + \sqrt{3 + t^2}) \Big|_{-1}^1 + 4 \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1 + t^2)\sqrt{3 + t^2}} = 2 + \frac{7}{2} \ln 3 + 4I_1, \end{aligned}$$

где $I_1 = \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}}$. Осталось вычислить интеграл I_1 . Полагая в нем $t = \sqrt{3} \operatorname{tg} z$, получим

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos z \, dz}{\cos^2 z + 3 \sin^2 z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d(\sqrt{2} \sin z)}{1 + (\sqrt{2} \sin z)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \sin z) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно имеем

$$P = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7}{4} \ln 3\right) + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

83. Площадь части поверхности S , заданной уравнением $\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ и отсекаемой плоскостями, уравнения которых $x = 1$ и $x = 2$ ($y \geq 0$).

◀ Из условия следует, что $0 \leq \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \leq 1$, откуда $0 \leq y \leq \operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)$. Дифференцируя обе части равенства $\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, получаем $\cos z \, dz = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \, dx + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \, dy$, откуда $z'_x = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y}{\cos z}$, $z'_y = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}{\cos z}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2 &= 1 + \frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{\cos^2 z} = 1 + \frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{ch}^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y)}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y}{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (4), п.3.2, имеем

$$\begin{aligned} P &= \int_1^2 \operatorname{ch} x \, dx \int_0^{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)} \frac{\operatorname{ch} y \, dy}{\sqrt{1 - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y}} = \int_1^2 \operatorname{ch} x \, dx \int_0^{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)} \frac{d(\operatorname{sh} y)}{\sqrt{1 - (\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y)^2}} = \\ &= \int_1^2 \operatorname{cth} x \left(\arcsin(\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y) \Big|_{y=0}^{y=\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)} \right) dx = \int_1^2 \arcsin 1 \cdot \operatorname{cth} x \, dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^2 \frac{d(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi}{2} \ln(\operatorname{sh} x) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{e^2 - e^{-2}}{e - e^{-1}} = \frac{\pi}{2} \ln \left(e + \frac{1}{e}\right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

84. Площадь части сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами.

◀ Пусть φ_1, φ_2 — долготы меридианов ($\varphi_2 > \varphi_1$), а ψ_1, ψ_2 — широты параллелей ($\psi_2 > \psi_1$). Тогда координаты любой точки $M = (x, y, z)$, принадлежащей указанной части сферы, можно записать в параметрической форме

$$x = a \cos \varphi \cos \psi, \quad y = a \sin \varphi \cos \psi, \quad z = a \sin \psi \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2).$$

Найдем коэффициенты Гаусса E, G и F :

$$E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = a^2 \cos^2 \psi, \quad G = (x'_\psi)^2 + (y'_\psi)^2 + (z'_\psi)^2 = a^2,$$

$$F = x'_\varphi x'_\psi + y'_\varphi y'_\psi + z'_\varphi z'_\psi = 0.$$

Таким образом, $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \cos \psi$ и, согласно формуле (3), п.3.2, имеем

$$P = a^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos \psi d\psi = a^2 (\varphi_2 - \varphi_1) (\sin \psi_2 - \sin \psi_1). \blacktriangleright$$

85. Площадь части поверхности тора, заданного векторным уравнением

$$\Phi = \Phi(\varphi, \psi) = ((b + a \cos \psi) \cos \varphi, (b + a \cos \psi) \sin \varphi, a \sin \psi), \quad 0 < a \leq b,$$

ограниченной двумя меридианами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ и двумя параллелями $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2$. Чему равна площадь поверхности всего тора?

◀ Вычислим гауссовы коэффициенты тора:

$$E = \langle \Phi'_\varphi, \Phi'_\varphi \rangle = (b + a \cos \psi)^2, \quad G = \langle \Phi'_\psi, \Phi'_\psi \rangle = a^2, \quad F = \langle \Phi'_\varphi, \Phi'_\psi \rangle = 0.$$

Следовательно, $\sqrt{EG - F^2} = a(b + a \cos \psi)$ и, применив формулу (3), п.3.2, имеем

$$P = a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} (b + a \cos \psi) d\psi = a(\varphi_2 - \varphi_1) (b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin \psi_2 - \sin \psi_1)).$$

Подставляя в полученное выражение $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 2\pi$, находим, что площадь всей поверхности тора равна $4\pi^2 ab$. ▶

Применяя формулу (3), п.3.1, вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

86. $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$.

◀ Тело T , объем которого требуется вычислить, представляет собой следующее множество точек:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2)\}.$$

Применяя формулу (3), п.3.1, получим

$$\begin{aligned} V &= \iiint_T dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{3}{35}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

87. $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

◀ Поскольку $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, xy \leq z \leq x + y\}$, то

$$V = \iiint_T dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y - xy) dy = \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{(1-x)^3}{2} \right) dx = \frac{7}{24}. \blacktriangleright$$

88. $az = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $a > 0$.

◀ Тело T ограничено частью поверхности параболоида вращения и частью конической поверхности, пересекающихся по кривой, проекция которой на плоскость xOy является окружностью $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$. Поэтому

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, \frac{x^2 + y^2}{a} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

В интеграле $V = \iiint_T dx dy dz$ перейдем к цилиндрическим координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Принимая во внимание симметрию точек тела относительно плоскостей xOz и yOz , а также равенство $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho$, получим

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{a}}^{\rho} dz = 2\pi \int_0^a \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{a} \right) d\rho = \frac{\pi a^3}{6}. \blacktriangleright$$

89. $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

« Тело T лежит в первом октанте и ограничено частью параболоида вращения, заданного уравнением $az = a^2 - x^2 - y^2$ (с вершиной в точке $(0, 0, a)$), и частью плоскости, уравнение которой $z = a - x - y$, в силу чего его можно представить в виде $T = T_1 \cup T_2$, где

$$T_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, a - x \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq z \leq a - \frac{x^2 + y^2}{a} \right\},$$

$$T_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x, a - x - y \leq z < a - \frac{x^2 + y^2}{a} \right\}.$$

формула (3), п.3.1, принимает вид

$$V = \iiint_{T_1} dx dy dz + \iiint_{T_2} dx dy dz.$$

После перехода к цилиндрическим координатам получим

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^a \rho d\rho \int_0^{a - \frac{\rho^2}{a}} dz + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}} \rho d\rho \int_{a - \rho(\sin \varphi + \cos \varphi)}^{a - \frac{\rho^2}{a}} dz = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^a \rho \left(a - \frac{\rho^2}{a} \right) d\rho + \int_0^{\frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}} \rho \left(\rho(\sin \varphi + \cos \varphi) - \frac{\rho^2}{a} \right) d\rho \right) d\varphi = \\ &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6(\sin \varphi + \cos \varphi)^2} \right) d\varphi = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12 \sin^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)} \right) d\varphi = \\ &= \frac{a^3}{24} \left(6\varphi + 2 \operatorname{ctg} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{24} (3\pi - 4). \blacktriangleright \end{aligned}$$

90. $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

« Тело T ограничено конической поверхностью $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ и поверхностью параболоида вращения, заданного уравнением $z = 6 - x^2 - y^2$ (с вершиной в точке $(0, 0, 6)$).

Решая уравнение $6 - x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ относительно $\sqrt{x^2 + y^2}$, получаем, что $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ откуда следует, что конус и параболоид пересекаются по кривой, проекцией которой на

плоскость xOy является окружность $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$. Следовательно, множество точек тела T имеет вид

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2 \right\}.$$

В интеграле $V = \iiint_T dx dy dz$ перейдем к цилиндрическим координатам и заменим тройной интеграл повторным. Принимая во внимание симметрию точек тела T относительно плоскостей xOz и yOz , получим

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho}^{6-\rho^2} dz = 2\pi \int_0^2 \rho(6 - \rho^2 - \rho) d\rho = \frac{32}{3}\pi. \blacktriangleright$$

$$91. (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$

Точки тела T симметричны относительно всех координатных плоскостей, поэтому в первом октанте находится его $\frac{1}{8}$ часть. Переходя в интеграле $V = \iiint_T dx dy dz$ к сферическим координатам по формулам (7), п.1.8, получим

$$V = 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{-\cos 2\theta}} \rho^2 d\rho = \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\sqrt{-\cos 2\theta})^3 d\theta.$$

Полагая в интеграле $\frac{\pi}{2} - \theta = t$, находим

$$V = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \cos^{\frac{3}{2}} 2t dt = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} d(\sin t) = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2u^2)^{\frac{3}{2}} du,$$

где $u = \sin t$. Замена переменной $\sqrt{2}u = \sin z$ приводит к интегралу

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 z dz = \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

$$92. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}, a > 0, b > 0, c > 0, h > 0.$$

Для вычисления объема тела, ограниченного данной поверхностью, удобно перейти к обобщенным сферическим координатам, полагая в формулах (9), п.1.8, $\alpha = \beta = 1$. Тогда $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (так как $x \geq 0$). Принимая во внимание, что $0 \leq \rho \leq$

$\sqrt[3]{\frac{a \sin \theta \cos \varphi}{h}}$, $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc\rho^2 \sin \theta$, имеем

$$V = \iiint_T dx dy dz = abc \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a \sin \theta \cos \varphi}{h}}} \rho^2 d\rho = \frac{a^2 bc}{3h} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi a^2 bc}{3h}. \blacktriangleright$$

$$93. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

◀ Из уравнения границы тела T видно, что его точки симметричны относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V = 8 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где T' — восьмая часть тела, лежащая в первом октанте. Заменим в этом интеграле переменные по формулам (9), п.1.8, полагая в них $\alpha = \beta = 1$. В сферических координатах уравнение границы тела принимает вид $\rho^2 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$, откуда заключаем, что $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. После замены переменных и перехода к повторному интегралу получим

$$\begin{aligned} V &= 8abc \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}} \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{4}{3} \pi abc \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta (1 - 2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d\theta = \frac{4}{3} \pi abc \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d(\cos \theta). \end{aligned}$$

Произведем в интеграле замену $\sqrt{2} \cos \theta = \sin t$. Тогда

$$V = \frac{8}{3\sqrt{2}} \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{4}{3\sqrt{2}} \pi abc B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} abc. \blacktriangleright$$

94. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$.

◀ Найдем уравнение проекции на плоскость xOy кривой, по которой пересекаются данные поверхности. Для этого подставим $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ в уравнение поверхности эллипсоида. Решив полученное уравнение относительно $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, имеем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Таким образом, тело T представляет собой множество точек

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \leq z \leq c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right\},$$

где $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}$.

В интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

целесообразно перейти к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам

$$x = a \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \rho \cos \varphi, \quad y = b \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Тогда $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \frac{ab}{2}(\sqrt{5}-1)\rho$. Принимая во внимание симметрию точек тела относительно плоскостей xOz и yOz , после замены переменных и перехода от тройного интеграла к

повторному имеем

$$\begin{aligned}
 V &= 2ab(\sqrt{5}-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{c\rho^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}^{c\sqrt{1-\frac{\rho^2(\sqrt{5}-1)}{2}}} dz = \pi abc(\sqrt{5}-1) \int_0^1 \left(\rho \sqrt{1-\frac{\rho^2(\sqrt{5}-1)}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \rho^3 \right) d\rho = \\
 &= \pi abc(\sqrt{5}-1) \left(\frac{2}{3(\sqrt{5}-1)} \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^0 - \frac{\sqrt{5}-1}{8} \rho^4 \Big|_1^0 = \\
 &= \pi abc \left(\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^3 \right) - \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right) = \frac{5}{12} \pi abc(3-\sqrt{5}). \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

95. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

◀ Принимая во внимание симметрию точек тела T относительно координатных плоскостей, имеем

$$V = 8 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где

$$\begin{aligned}
 T' &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq c \sqrt[4]{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2} \right\}, \\
 D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Затем приходим к выводу о целесообразности перехода в тройном интеграле к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам (12), п.1.8, полагая там $\alpha = 1$. Заменяя переменные, получим

$$V = 8ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{c\sqrt[4]{1-\rho^4}} dz = 4\pi abc \int_0^1 \rho(1-\rho^4)^{\frac{1}{4}} d\rho.$$

Полагая $\rho = t^{\frac{1}{4}}$, выразим объем V через Γ -функцию Эйлера:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi abc \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (1-t)^{\frac{1}{4}} dt = \pi abc B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = \\
 &= \pi abc \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} = \frac{\pi \sqrt{\pi} abc \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{3 \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{abc}{3} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4}}{3} = \frac{abc}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right). \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

96. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, h > 0, k > 0.$

◀ Множество всех точек тела T принадлежит первому октанту. В интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п. 1.8, полагая в них $\alpha = \beta = 2$. Из условия $\frac{x}{h} - \frac{y}{k} \geq 0$ получаем неравенство $\frac{a \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{h} - \frac{b \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{k} \geq 0$, откуда $0 \leq \varphi \leq \arctg \sqrt{\frac{ak}{bh}}$. После замены переменных в тройном интеграле перейдем к повторному интегралу. Получим

$$\begin{aligned} V &= 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\arctg \sqrt{\frac{ak}{bh}}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{a \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{h} - \frac{b \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{k}} \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{2abc}{3 \left(\frac{b}{k} + \frac{a}{h} \right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 \theta d(\sin \theta) \int_{\arctg \sqrt{\frac{ak}{bh}}}^0 \left(\frac{a \cos^2 \varphi}{h} - \frac{b \sin^2 \varphi}{k} \right)^3 d \left(\frac{a \cos^2 \varphi}{h} - \frac{b \sin^2 \varphi}{k} \right) = \\ &= \frac{2abc}{3 \left(\frac{b}{k} + \frac{a}{h} \right)} \frac{\sin^{10} \theta}{10} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a \cos^2 \varphi}{h} - \frac{b \sin^2 \varphi}{k} \right)^4}{4} \bigg|_{\arctg \sqrt{\frac{ak}{bh}}}^0 = \frac{abc}{60} \frac{\left(\frac{a}{h} \right)^4}{\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

97. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

◀ В интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, полагая там $\alpha = \beta = 4$. Тогда

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1,$$

$$V = 16abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin^7 \theta d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} abc B(4, 2) B(2, 2) = \frac{abc}{90}. \blacktriangleright$$

98. $\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c} \right)^{\frac{2}{3}} = 1.$

◀ Точки тела T симметричны относительно координатных плоскостей, поэтому

$$V = 8 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где T' — восьмая часть тела, лежащая в первом октанте.

Заменяя в тройном интеграле переменные по формулам (9), п.1.8 (полагая там $\alpha = \beta = 3$), получим

$$\begin{aligned} V &= 72abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^5 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \\ &= 6abc B\left(3, \frac{3}{2}\right) B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 6abc \frac{\Gamma(3)\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{4}{35} \pi abc. \blacktriangleright \end{aligned}$$

99. $x^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = b^2$, $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ($x > 0$, $a < b$).

◀ Точки тела T , объем которого требуется вычислить, симметричны относительно плоскостей xOz и xOy , которые разделяют его на четыре равные части. Граница тела состоит из частей конической и цилиндрических поверхностей. В силу всего сказанного выше имеем

$$V = 4 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где множество точек T' принадлежит первому октанту.

Заменяя в тройном интеграле переменные по формулам $z = \rho \cos \varphi$, $x = \rho \sin \varphi$, $y = y$, получим

$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad a \leq \rho \leq b, \quad 0 \leq y \leq \rho \sqrt{-\cos 2\varphi}, \quad \frac{D(z, x, y)}{D(\rho, \varphi, y)} = \rho,$$

$$V = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^b \rho d\rho \int_0^{\rho \sqrt{-\cos 2\varphi}} dy = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cos 2\varphi} d\varphi \int_a^b \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}(b^3 - a^3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\cos 2\varphi} d\varphi.$$

Произведем в интеграле замену переменной, полагая $t = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Тогда

$$V = \frac{4}{3}(b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2t} dt.$$

В полученном интеграле целесообразно произвести замену $\sin 2t = z^{\frac{1}{2}}$, после чего имеем $dt = \frac{z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}}{4} dz$,

$$V = \frac{b^3 - a^3}{3} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{4}} dz = \frac{b^3 - a^3}{3} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3}(b^3 - a^3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} F^2\left(\frac{3}{4}\right). \blacktriangleright$$

100. $\frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $x = a$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).

◀ Полагая в уравнении поверхности $z = 0$, получаем уравнение прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, по которой поверхность пересекается с плоскостью xOy . В тройном интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

произведем замену переменных, полагая $\frac{x}{a} = u$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = v$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = w$. При этом получим

$$0 \leq u \leq 1, \quad \frac{2w}{\pi} \arcsin w \leq v \leq 1, \quad -1 \leq w \leq 1, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} = abc,$$

$$\begin{aligned} V &= abc \int_0^1 du \int_{-\frac{2w}{\pi} \arcsin w}^1 dw \int_{-\frac{2w}{\pi} \arcsin w}^1 dv = abc \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{2}{\pi} w \arcsin w\right) dw = 2abc \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 w \arcsin w dw\right) = \\ &= 2abc \left(1 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{w^2}{2} \arcsin w \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{w^2 dw}{\sqrt{1-w^2}}\right)\right) = abc \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w^2 dw}{\sqrt{1-w^2}}\right) = \end{aligned}$$

$$= abc \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-w^2} dw + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} \right) = abc \left(2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} abc. \blacktriangleright$$

$$101. (a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

◀ В интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

заменим переменные по формулам $a_ix + b_iy + c_iz = u_i$ ($i = 1, 2, 3$), отображающим шар $T' = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq h^2\}$ на тело T . Тогда, принимая во внимание, что $\frac{D(x, y, z)}{D(u_1, u_2, u_3)} = \frac{1}{|\Delta|}$, получим

$$V = \frac{1}{|\Delta|} \iiint_{T'} du_1 du_2 du_3 = \frac{4}{3} \frac{\pi h^3}{|\Delta|}. \blacktriangleright$$

$$102. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{n-2}, \quad n > 1, a > 0, b > 0, c > 0, h > 0.$$

◀ Тело T находится в полупространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ и его точки симметричны относительно плоскостей xOz и yOz , в силу чего имеем

$$V = 4 \iiint_{T'} dx dy dz,$$

где T' — четвертая часть тела, находящаяся в первом октанте.

Перейдем в интеграле к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, полагая в них $\alpha = \beta = 1$. Тогда

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt[3]{\frac{c \cos \theta \sin^{2n-4} \theta}{h(\sin^{2n} \theta + \cos^{2n} \theta)}} = \rho(\theta),$$

$$V = 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\rho(\theta)} \rho^2 d\rho = \frac{2\pi}{3h} abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta \sin^{2n-3} \theta}{\sin^{2n} \theta + \cos^{2n} \theta} d\theta = \frac{2\pi}{3h} abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{2n-3} \theta d(\operatorname{tg} \theta)}{1 + \operatorname{tg}^{2n} \theta}.$$

Полагая $\operatorname{tg}^{2n} \theta = t$, получаем

$$d(\operatorname{tg} \theta) = \frac{t^{\frac{1}{2n}-1}}{2n} dt,$$

$$V = \frac{\pi abc^2}{3nh} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{n}}}{1+t} dt = \frac{\pi abc^2}{3nh} B\left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi abc^2}{3nh} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi^2 abc^2}{3nh \sin \frac{\pi}{n}}. \blacktriangleright$$

103. Найти объем m -мерной пирамиды

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{a_i} \leq 1, x_i \geq 0 (i = \overline{1, m}) \right\}, \quad a_i > 0, i = \overline{1, m}.$$

◀ Объем тела T вычисляется по формуле

$$V = \int_T dx = \int_0^{a_1} dx_1 \int_0^{a_2 \left(1 - \frac{x_1}{a_1}\right)} dx_2 \dots \int_0^{a_m \left(1 - \frac{x_1}{a_1} - \dots - \frac{x_{m-1}}{a_{m-1}}\right)} dx_m.$$

Заменим в интеграле переменные по формулам $x_i = a_i t_i$, $i = \overline{1, m}$. Тогда получим, принимая во внимание, что $\frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(t_1, \dots, t_m)} = a_1 a_2 \dots a_m$:

$$\begin{aligned} V &= a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{m-1}} dt_m = \\ &= a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{m-2}} (1 - (t_1 + \dots + t_{m-1})) dt_{m-1} = \\ &= a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{m-3}} \frac{(1 - (t_1 + \dots + t_{m-1}))^2}{2} \Big|_{t_{m-1}=1-(t_1+\dots+t_{m-2})}^{t_{m-1}=0} dt_{m-2} = \\ &= \frac{1}{2} a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{m-3}} (1 - (t_1 + \dots + t_{m-2}))^2 dt_{m-2} = \\ &= \frac{1}{3!} a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2 \dots \int_0^{1-t_1-\dots-t_{m-4}} (1 - (t_1 + \dots + t_{m-3}))^3 dt_{m-3} = \dots = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} a_1 a_2 \dots a_m \int_0^1 (1 - t_1)^{m-1} dt_1 = \frac{1}{m!} a_1 a_2 \dots a_m. \blacktriangleright \end{aligned}$$

104. Найти объем M -мерного шара

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq a^2 \right\}.$$

◀ Заменяя в интеграле

$$V = \int_T dx$$

переменные по формулам (14), п.1.8, и принимая во внимание формулу (15) того же пункта, получим

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi_3 d\varphi_3 \dots \int_0^{\pi} \sin^{m-2} \varphi_{m-1} d\varphi_{m-1} \int_0^a \rho^{m-1} d\rho = \\ &= 2^{m-1} \frac{\pi a^m}{m} \prod_{j=2}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j. \end{aligned}$$

Каждый интеграл, входящий в произведение, является B -функцией Эйлера:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \frac{1}{2} B\left(\frac{j}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}.$$

Следовательно,

$$\prod_{j=2}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2} \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2) \dots \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}, \quad V = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}} a^m}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

При $m=2$ получим $V = \pi a^2$, а при $m=3$ имеем $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, что известно из элементарного курса геометрии. ►

105. Найти объем m -мерного конуса, ограниченного поверхностью, заданной уравнением $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_{m-1}^2}{a_{m-1}^2} = \frac{x_m^2}{a_m^2}$, и гиперплоскостью, уравнение которой $x_m = a_m$.

◀ В интеграле $V = \int_T dx$ заменим переменные по формулам

$$x_1 = a_1 \rho \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{m-2}, \quad x_j = a_j \rho \cos \varphi_{j-1} \prod_{i=j}^{m-2} \sin \varphi_i \quad (j = \overline{2, m-2}),$$

$$x_{m-1} = a_{m-1} \rho \cos \varphi_{m-2}, \quad x_m = x_m.$$

Принимая во внимание равенство

$$\frac{\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\mathcal{D}(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-2}, x_m)} = a_1 a_2 \dots a_{m-1} \rho^{m-2} \prod_{j=1}^{m-2} \sin^{j-1} \varphi_j$$

и решение предыдущего примера, получим

$$V = a_1 a_2 \dots a_{m-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \sin \varphi_2 d\varphi_2 \dots \int_0^{\pi} \sin^{m-3} \varphi_{m-2} d\varphi_{m-2} \int_0^1 \rho^{m-2} d\rho \int_{\rho a_m}^{a_m} dx_m =$$

$$= \frac{2\pi}{(m-1)m} a_1 a_2 \dots a_m \cdot 2^{m-3} \prod_{j=2}^{m-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{j-1} \varphi_j d\varphi_j =$$

$$= \frac{2\pi}{(m-1)m} a_1 a_2 \dots a_m \cdot 2^{m-3} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-3} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}} a_1 a_2 \dots a_m}{(m-1)m\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}} a_1 a_2 \dots a_m}{m\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}. \quad \blacktriangleright$$

Применяя формулы (1), п.3.3, найти координаты центра тяжести:

106. Однородной пластинки D , граница которой задана уравнениями

$$ay = x^2, \quad x + y = 2a \quad (a > 0).$$

◀ Прямая $\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2a\}$ и кривая $\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ay = x^2\}$ пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = -2a$, $x_2 = a$. Однородная пластинка D является плоской замкнутой областью $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2a \leq x \leq a, \frac{x^2}{a} \leq y \leq 2a - x\right\}$, а ее масса

$$m = \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int_{-2a}^a \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) dx = \frac{9}{2} a^2.$$

По формулам (1), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_{-2a}^a x dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \frac{1}{m} \int_{-2a}^a \left(2ax - x^2 - \frac{x^3}{a} \right) dx = -\frac{a}{2},$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y dy = \frac{1}{m} \int_{-2a}^a \left(\frac{(2a-x)^2}{2} - \frac{x^4}{2a^2} \right) dx = \frac{8}{5}a. \blacktriangleright$$

107. Однородной пластинки D , ограниченной частью кривой

$$\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \right\}$$

и отрезками $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a$.

◀ Вычислим массу пластинки D :

$$m = \iint_D dx dy = \int_0^a dx \int_0^{y(x)} dt = \int_0^a y(x) dx,$$

где $y(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$. Полагая $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) и принимая во внимание, что возрастанию параметра t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ соответствует убывание переменной x от a до 0, получим

$$m = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t (-3a \cos^2 t \sin t) dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} a^2 \frac{\Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{3}{32} \pi a^2.$$

Применив формулы (1), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_0^a x dx \int_0^{y(x)} dt = \frac{1}{m} \int_0^a xy(x) dx = \frac{3a^3}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \sin^4 t dt = \frac{3a^3}{2m} B\left(\frac{5}{2}, 3\right) = \frac{256a}{315\pi},$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_0^a dx \int_0^{y(x)} t dt = \frac{1}{2m} \int_0^a y^2(x) dx = \frac{3a^3}{2m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt = \frac{3a^3}{4m} B\left(4, \frac{3}{2}\right) = \frac{256a}{315\pi}. \blacktriangleright$$

108. Однородной пластинки D , ограниченной кривой, заданной уравнением $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, и отрезком луча $\varphi = 0$.

◀ Применяя формулы пункта 3.3, получим

$$m = \iint_D dx dy = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} \rho d\rho = \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^\pi (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{3}{4} \pi a^2,$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{1}{m} \iint_D x \, dx \, dy = \frac{1}{m} \int_0^\pi \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} \rho^2 \, d\rho = \frac{a^3}{3m} \int_0^\pi \cos \varphi (1 + \cos \varphi)^3 \, d\varphi = \\
 &= \frac{a^3}{3m} \int_0^\pi (3 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) \, d\varphi = \frac{2a^3}{3m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi) \, d\varphi = \frac{a^3}{3m} \left(3B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \right) = \frac{5}{6}a, \\
 y_0 &= \frac{1}{m} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{1}{m} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} \rho^2 \, d\rho = \\
 &= \frac{a^3}{3m} \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{a^3}{3m} \int_\pi^0 (1 + \cos \varphi)^3 d(\cos \varphi) = \frac{16a}{9\pi}.
 \end{aligned}$$

При решении примера использовали переход в двойном интеграле от декартовых координат к полярным координатам. ►

109. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, если плотность ее вещества в точке (x, y) пропорциональна расстоянию от этой точки до точки $(a, 0)$.

◀ Из условия задачи следует, что плотность μ вещества пластинки D выражается формулой $\mu(x, y) = c\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, где $c > 0$ — постоянная. Согласно формулам (1), п.3.3, имеем

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint_D x \mu(x, y) \, dx \, dy, \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint_D y \mu(x, y) \, dx \, dy,$$

где $m = \iint_D \mu(x, y) \, dx \, dy$. После замены переменных по формулам $x - a = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получим

$$\begin{aligned}
 m &= c \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-2a \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho = \frac{8}{3}ca^3 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \\
 &= \frac{8}{3}ca^3 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{8}{3}ca^3 \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}ca^3, \\
 x_0 &= \frac{c}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-2a \cos \varphi} (a + \rho \cos \varphi) \rho^2 \, d\rho = \frac{c}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(-\frac{8}{3}a^4 \cos^3 \varphi + 4a^4 \cos^5 \varphi \right) d\varphi = \\
 &= \frac{4ca^4}{3m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3 \cos^5 \varphi - 2 \cos^3 \varphi) \, d\varphi = \frac{4ca^4}{3m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - 4 \sin^2 \varphi + 3 \sin^4 \varphi) d(\sin \varphi) = -\frac{a}{5},
 \end{aligned}$$

$$y_0 = \frac{c}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{-2a \cos \varphi} \rho^3 d\rho = \frac{4ca^4}{m} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi = 0. \blacktriangleright$$

110. Найти моменты инерции относительно осей координат Ox и Oy однородной пластинки

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - \sqrt{2ax - x^2} \right\}.$$

◀ Заменяя в формуле (2), п.3.3, для вычисления I_x двойной интеграл повторным, при $\mu(x, y) = 1$ получаем

$$I_x = \int_0^a dx \int_0^{a - \sqrt{2ax - x^2}} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^a \left(a - \sqrt{2ax - x^2} \right)^3 dx.$$

Полагая $x = 2a \sin^2 t$, находим

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t (1 - \sin 2t)^3 d(2t) = \frac{a^4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u (1 - \sin u)^3 du = \\ &= \frac{a^4}{6} \left(B\left(1, \frac{1}{2}\right) - 3B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + 3B\left(2, \frac{1}{2}\right) - B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \right) = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi). \end{aligned}$$

Интеграл $I_y = \iint_D x^2 dx dy$ заменим повторным, в котором внешнее интегрирование производится по переменной y . При этом получим

$$I_y = \int_0^a dy \int_0^{a - \sqrt{2ay - y^2}} x^2 dx = I_x = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi). \blacktriangleright$$

111. Доказать формулу $I_l = I_{l_0} + md^2$, где I_l, I_{l_0} — моменты инерции плоской пластинки D относительно параллельных осей l и l_0 , из которых l_0 проходит через центр тяжести пластинки, d — расстояние между осями, m — масса пластинки.

◀ Выберем систему координат xOy так, чтобы ее начало O совпадало с центром тяжести $M_0 = (x_0, y_0)$ пластинки D , а ось Ox — с прямой l_0 (рис. 11). Тогда, очевидно, $y_0 = 0$. Пусть $\mu(x, y)$ — плотность вещества пластинки. Расстояние точки $(x, y) \in D$ от прямой l равно $d - y$, в силу чего можем написать

$$I_l = \iint_D (d - y)^2 \mu(x, y) dx dy = d^2 \iint_D \mu(x, y) dx dy - 2d \iint_D y \mu(x, y) dx dy + \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy.$$

Из равенств

$$\iint_D \mu(x, y) dx dy = m, \quad \iint_D y \mu(x, y) dx dy = m y_0 = 0, \quad \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy = I_x = I_{l_0}$$

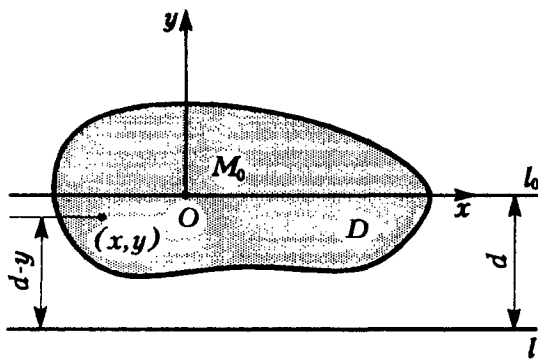


Рис. 11

следует доказываемая формула.

112. Доказать, что момент инерции I плоской пластинки D относительно прямой, проходящей через центр тяжести $O = (0, 0)$ пластинки и составляющей угол α с осью Ox , определяется формулой

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

где I_x и I_y — моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy , I_{xy} — центробежный момент инерции (см. формулы (2) и (3), п.3.3).

◀ По условию центр тяжести пластинки D находится в начале координат системы xOy . Фиксируем точку (x, y) . Ее расстояние до заданной прямой равно $(x - y \operatorname{ctg} \alpha) \sin \alpha = x \sin \alpha - y \cos \alpha$ (рис. 12), в силу чего имеем

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 \mu(x, y) dx dy = \\ &= \sin^2 \alpha \iint_D \mu(x, y) x^2 dx dy - 2 \sin \alpha \cos \alpha \iint_D xy \mu(x, y) dx dy + \cos^2 \alpha \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy = \\ &= I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_x \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

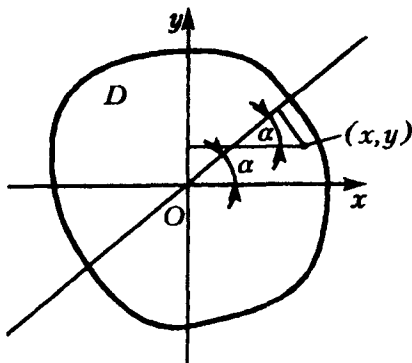


Рис. 12

113. Определить силу давления воды на боковую стенку цилиндрического сосуда $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$, $x \geq 0$, если уровень воды $z = h$.

◀ Согласно основному закону гидростатики, на элемент $d\sigma(M)$ цилиндрической поверхности, площадь которого $dS(M)$, действует сила давления $dP(M)$, равная по величине произведению $dS(M)$ на плотность $\mu(M)$ жидкости и на расстояние элемента $d\sigma(M)$ от свободной поверхности жидкости. Эта сила направлена в сторону единичной внешней нормали к боковой поверхности цилиндра. Следовательно,

$$dP(M) = dS(M) \mu(M) (h - z) n(M), \quad M \in d\sigma.$$

Поскольку образующие цилиндра параллельны оси Oz , то

$$dP(M) = dX(M) i + dY(M) j,$$

где $dX(M) = dS(M) (h - z) \mu(M) \cos(\widehat{n, i})$, $dY(M) = dS(M) (h - z) \mu(M) \cos(\widehat{n, j})$. Суммируя по всем элементам $d\sigma(M)$ и принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz, \\ (\cos \widehat{n, i}) &= \frac{1}{\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}}, \quad \cos(\widehat{n, j}) = -\frac{x_y'}{\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}}, \quad \mu(M) = 1, \end{aligned}$$

получаем следующие значения компонент X и Y вектора P — суммарного давления на стенку цилиндрического сосуда при $x \geq 0$:

$$X = \iint_{\substack{-a \leq y \leq a \\ 0 \leq z \leq h}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} (h - z) \cos(\widehat{n, i}) dy dz = \int_{-a}^a dy \int_0^h (h - z) dz = a(h - z)^2 \Big|_h^0 = ah^2,$$

$$Y = \iint_{\substack{-a \leq y \leq a \\ 0 \leq z \leq h}} \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} (h - z) \cos(\widehat{n, j}) dy dz = \int_{-a}^a y dy \int_0^h (h - z) dz = 0. \quad \blacktriangleright$$

Найти координаты центров тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

$$114. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c.$$

◀ Тело T однородно, ограничено частью конической поверхности $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \right.$

$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \Big\}$, частью плоскости $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2, z = c\}$ и симметрично

относительно оси Oz . Следовательно, его центр тяжести $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ лежит на этой оси и $x_0 = 0, y_0 = 0$. Согласно одной из формул (4), п.3.3, имеем, полагая $\mu(x, y, z) = 1$:

$$z_0 = \frac{1}{V} \iiint_T z \, dx \, dy \, dz,$$

где V — объем тела T .

В интеграле $V = \iiint_T dx \, dy \, dz$ перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам, полагая $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$, $z = z$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). После замены получим

$$V = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{c\rho}^c dz = 2\pi abc \int_0^1 \rho(1-\rho) \, d\rho = \frac{\pi}{3} abc.$$

Таким образом, имеем

$$z_0 = \frac{ab}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{c\rho}^c z \, dz = \frac{\pi abc^2}{V} \int_0^1 \rho(1-\rho^2) \, d\rho = \frac{\pi abc^2}{4V} = \frac{3}{4}c. \blacktriangleright$$

$$115. \quad x^2 = 2pz, \quad y^2 = 2px, \quad x = \frac{p}{2}, \quad z = 0 \quad (p > 0).$$

◀ Точки тела T симметричны относительно плоскости xOz , поэтому

$$V = 2 \iiint_{T'} dx \, dy \, dz,$$

где $T' = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \frac{p}{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2px}, 0 \leq z \leq \frac{x^2}{2p} \right\}$. Заменяя тройной интеграл повторным, получим

$$V = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = \frac{1}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} x^2 dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \frac{1}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} x^2 \sqrt{2px} \, dx = \frac{p^3}{28}.$$

Применив формулы (4), п.3.3, найдем

$$x_0 = \frac{2}{V} \int_0^{\frac{p}{2}} x \, dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = \frac{28}{p^4} \int_0^{\frac{p}{2}} x^3 \sqrt{2px} \, dx = \frac{7}{18}p,$$

$$y_0 = \frac{1}{V} \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y \, dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = \frac{7}{p^4} \int_0^{\frac{p}{2}} \left(x^2 y^2 \Big|_{y=-\sqrt{2px}}^{y=\sqrt{2px}} \right) dx = 0,$$

$$z_0 = \frac{2}{V} \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} z dz = \frac{7}{p^5} \int_0^{\frac{p}{2}} x^4 \sqrt{2px} dx = \frac{7}{176} p. \blacktriangleright$$

$$116. \frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, \quad x = 0, y = 0, z = 0, \quad (n > 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

◀ Точки тела T принадлежат первому октанту. В интеграле

$$V = \iiint_T dx dy dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, полагая там $\alpha = \beta = \frac{2}{n}$. Тогда

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \frac{4}{n^2} abc \rho^2 \cos^{\frac{2}{n}-1} \theta \sin^{\frac{4}{n}-1} \theta \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi,$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{n^2} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1} \theta \sin^{\frac{4}{n}-1} \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{abc}{3n^2} B\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{abc}{3n^2} \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Применив формулы (4), п.3.3, имеем

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{V} \iiint_T x dx dy dz = \frac{4a^2 bc}{n^2 V} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{6}{n}-1} \theta \cos^{\frac{2}{n}-1} \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{4}{n}-1} \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{1}{V} \frac{a^2 bc}{4n^2} B\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n}\right) B\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{3a}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}, \\ y_0 &= \frac{1}{V} \iiint_T y dx dy dz = \frac{3b}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}, \quad z_0 = \frac{1}{V} \iiint_T z dx dy dz = \frac{3c}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

117. Определить координаты центра тяжести тела, имеющего форму куба $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, если его плотность в точке (x, y, z) определяется формулой

$$\mu(x, y, z) = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}}, \quad \text{где } 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < \gamma < 1.$$

◀ Найдем массу m тела T :

$$m = \iiint_T \mu(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha \beta \gamma}.$$

Согласно одной из формул (4), п.3.3, имеем

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \iiint_T x \mu(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{m} \int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz = \\ &= \frac{1}{m} \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta \gamma} = \alpha. \end{aligned}$$

Аналогично находим $y_0 = \beta$, $z_0 = \gamma$. ►

118. Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела T , ограниченного поверхностью, заданной уравнением

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

◄ Применим формулы (5), п.3.3, и в интеграле

$$I_{xy} = \iiint_T z^2 dx dy dz$$

перейдем к обобщенным сферическим координатам по формулам (9), п.1.8, при $\alpha = \beta = 1$. Уравнение границы тела T в сферических координатах примет вид $\rho^2 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$, откуда следует, что $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. Множество $T' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sqrt{-\cos 2\theta}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ отображается на множество T . Принимая во внимание равенство $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc \rho^2 \sin \theta$, после замены переменных и перехода от тройного интеграла к повторному получим

$$I_{xy} = abc^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{-\cos 2\theta}} \rho^4 d\rho = \frac{2}{5} \pi abc^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^{\frac{5}{2}} d\theta.$$

Полагая в интеграле $\sqrt{2} \cos \theta = t^{\frac{1}{2}}$, имеем

$$I_{xy} = \frac{\pi abc^3}{5\sqrt{2}} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1} (1-t)^{\frac{5}{2}} dt = \frac{\pi abc^3}{5\sqrt{2}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{\pi^2 abc^3}{128\sqrt{2}}.$$

Аналогично получим

$$I_{yz} = \frac{15\pi^2 a^3 bc}{256\sqrt{2}}, \quad I_{zx} = \frac{15\pi^2 ab^3 c}{256\sqrt{2}}. \quad \blacktriangleright$$

119. Найти момент инерции неоднородного шара $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ массы m относительно его диаметра, если плотность шара в текущей точке $M = (x, y, z)$ пропорциональна расстоянию этой точки от центра шара.

◄ По условию задачи имеем

$$\mu(x, y, z) = \gamma \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \gamma = \text{const}, \gamma > 0.$$

Постоянную γ определим из условия

$$m = \gamma \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$$

Перейдя в интеграле к сферическим координатам, получим

$$m = \gamma \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^3 d\rho = \pi \gamma r^4,$$

откуда $\gamma = \frac{m}{\pi r^4}$.

Считая, что диаметр шара является отрезком оси Ox и применяя одну из формул (7), п.3.3, найдем

$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{m}{\pi r^4} \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{m}{\pi r^4} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r \rho^5 d\rho = \\
 &= \frac{2\pi m r^6}{3\pi r^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{3} m r^2 B\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{1}{3} m r^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2)}{\Gamma(2 + \frac{1}{2})} = \frac{4}{9} m r^2. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

120. Доказать, что момент инерции тела $T \subset \mathbb{R}^3$ относительно оси l , проходящей через его центр тяжести $O = (0, 0, 0)$ и образующей углы α, β, γ с осями координат, определяется по формуле

$$I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции тела относительно осей координат (см. формулы (7), п.3.3) и

$$K_{xy} = \iiint_T xy \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$K_{xz} = \iiint_T xz \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$K_{yz} = \iiint_T yz \mu(x, y, z) dx dy dz$$

— центробежные моменты.

◀ Найдем квадрат расстояния от точки $M = (x, y, z)$ тела до прямой l (т.е. до точки N — проекции точки M на прямую l , рис. 13). Пусть $r = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки M , а e — орт прямой l . Очевидно, $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, $d^2 = |r|^2 - \langle r, e \rangle$, где $\langle r, e \rangle$ — скалярное произведение векторов r и e . Принимая во внимание равенства $|r|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\langle r, e \rangle = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, имеем

$$\begin{aligned}
 d^2 &= (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 = \\
 &= (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma.
 \end{aligned}$$

Пусть $\mu(x, y, z)$ — плотность вещества тела T . Из определения момента инерции тела относительно некоторой оси (см. формулу (6), п.3.3) следует равенство

$$I_l = \iiint_T d^2 \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Подставив в интеграл найденное выше значение d^2 и пользуясь свойством аддитивности тройного интеграла, получим доказываемую формулу. ▶

121. Найти момент инерции относительно начала координат однородного тела T плотности μ_0 , ограниченного поверхностью, заданной уравнением $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

◀ Применяя формулу (8), п.3.3, получим

$$I_0 = \mu_0 \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

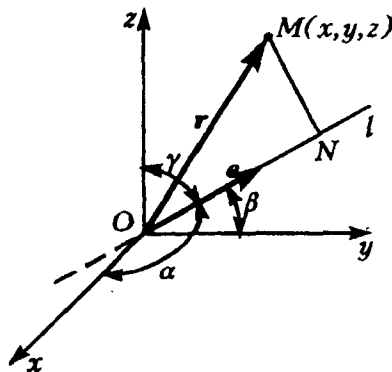


Рис. 13

Перейдем в интеграле к сферическим координатам по формулам (7), п.1.8. Очевидно, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq a \sin \theta$. После замены тройного интеграла повторным найдем

$$I_0 = 8\mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \sin \theta} \rho^4 d\rho = \frac{4}{5} \pi \mu_0 a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta = \frac{2}{5} \pi \mu_0 a^5 B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8} \mu_0 a^5. \blacktriangleright$$

122. Найти ньютонов потенциал в точке $P = (x, y, z)$ сферического слоя $T = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq r_2^2\}$, если плотность $\mu = f(r)$, где f — известная функция, $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

◀ Повернем систему координат так, чтобы ось $O\zeta_1$ системы координат $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ проходила через точку P . В новых координатах сферический слой является множеством точек, определяемым неравенствами $r_1^2 \leq \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \leq r_2^2$, по которому будем интегрировать, применяя формулу (10), п.3.3. Имеем

$$u(x, y, z) = u_1(0, 0, r) = \iiint_{r_1^2 \leq \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \leq r_2^2} \frac{f\left(\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}\right)}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + (\zeta_1 - z)^2}} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1.$$

Перейдем к сферическим координатам по формулам (7), п.1.8. Легко убедиться в том, что $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $r_1 \leq \rho \leq r_2$. Принимая это во внимание и переходя к повторному интегралу, получим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 f(\rho) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos \theta + r^2}} = \\ &= 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 f(\rho) \left(\frac{\sqrt{\rho^2 - 2\rho r \cos \theta + r^2}}{\rho r} \right) \bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\rho = \frac{2\pi}{r} \int_{r_1}^{r_2} \rho f(\rho) (\rho + r - |\rho - r|) d\rho = \\ &= \begin{cases} 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho f(\rho) d\rho, & \text{если } \rho > r, \\ \frac{4\pi}{r} \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 f(\rho) d\rho, & \text{если } \rho < r, \end{cases} \end{aligned}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ можно записать в более компактной форме. Если $\rho > r$, то $\frac{\rho^2}{r} > \rho$; если $\rho < r$, то $\frac{\rho^2}{r} < \rho$. Поэтому

$$u(x, y, z) = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \min \left\{ \frac{\rho^2}{r}, \rho \right\} f(\rho) d\rho. \blacktriangleright$$

Упражнения для самостоятельной работы

Найти площади плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными уравнениями:

50. $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 = a\sqrt{3}y$ (внутри каждой из кривых).

51. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$. 52. $x^4 + y^4 = 2a^2 xy$. 53. $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$.

54. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, $y > 0$. 55. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{x^2}{h^2}$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

56. $\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^6 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$. 57. $(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}})^8 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$, $x > 0$, $y > 0$.

58. $x^2 = ay, y^2 = bx, y = m, y = n$ ($0 < a < b, 0 < m < n$).

59. $y^2 = a^2 - 2ax, y^2 = b^2 - 2bx, y^2 = m^2 + 2mx, y^2 = n^2 + 2nx$ ($0 < m < n, 0 < a < b$).

60. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2), a > 0$. 61. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0$.

62. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^5 = \frac{x^2 y^2}{c^4}$. 63. $x + y = a, x + y = b, y = \alpha x, y = \beta x$ ($0 < a < b, 0 < \alpha < \beta$).

64. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, 4\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ ($a > 0, b > 0$).

С помощью двойных интегралов найти объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

65. $x + y + z = a, x^2 + y^2 = b^2, z = 0, (a > b\sqrt{2})$. 66. $x^2 z^2 + a^2 y^2 = c^2 x^2, 0 < x < a$.

67. $y^2 + z^2 = x, x = y (z > 0)$. 68. $z = \sin(x^2 + y^2), z = 0, n\pi < x^2 + y^2 < (n+1)\pi$.

69. $x^2 + y^2 = \alpha z^2, x^2 + y^2 = ax (z > 0)$.

70. $z(x + y) = ax + by, z = 0, 1 < x^2 + y^2 < 4, (x > 0, y > 0, a > 0, b > 0)$.

71. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^k + \frac{z}{c} = 1, z > 0$. 72. $z^2 = 2xy, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2} (x > 0, y > 0, z > 0)$.

73. $z = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}, x + y = 1 (x > 0, y > 0, z > 0)$.

74. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} (y > 0, z > 0)$.

75. $z = x^2 y, y^2 = a^2 - 2ax, y^2 = m^2 + 2mx, y = 0, z = 0$.

Найти площади:

76. Части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : az = xy\}$, заключенной внутри цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2, z \in \mathbb{R}\}$.

77. Части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, расположенной вне цилиндров $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = ax, z \in \mathbb{R}\}, S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = -ax, z \in \mathbb{R}\}, a > 0$.

78. Части поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2az\}$, заключенной внутри цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, z \in \mathbb{R}\}$.

79. Части цилиндра $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2, z \in \mathbb{R}\}$, вырезанной плоскостями, заданными уравнениями $x + z = 0, x - z = 0 (x > 0, y > 0)$.

80. Части поверхности $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + z = 1 \right\}$, отсекаемой плоскостью xOy .

81. Части поверхности $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{2z}{c} = 1 \right\}$, вырезанной плоскостями, заданными уравнениями $x = 0, y = 0, z = 0$.

82. Части поверхности $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z \right\}$, вырезанной поверхностью $S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z \geq 0 \right\}$.

83. Части поверхности $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \right\}$, заключенной внутри цилиндра $S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, z \in \mathbb{R} \right\}$.

С помощью тройных интегралов найти объемы тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

84. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3(x^3 + y^3 + z^3), a > 0, y > 0, z > 0$. 85. $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3(x - y)$.

86. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^6 = \frac{z^4}{h^4}$. 87. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \alpha^2\right)^2 = 4\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right), \alpha^2 < 1$.

88. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c}, x > 0, y > 0, z > 0$.

89. $(a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 = 1, a_3 x + b_3 y + c_3 z = \pm h$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$90. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz.$$

$$91. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0, 0 < a < b).$$

$$92. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad 93. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

$$94. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$95. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^4 = \frac{xyz}{abc}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$96. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$97. \sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0. \quad 98. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}.$$

Найти координаты центров тяжести однородных пластинок $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченных кривыми, заданными уравнениями:

$$99. x^4 + y^4 = x^2 y. \quad 100. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab}. \quad 101. \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0.$$

$$102. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{c^2}. \quad 103. (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy, x > 0, y > 0.$$

Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей координат Ox и Oy однородных пластинок $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченных кривыми, заданными уравнениями:

$$104. \frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, y = 0 (b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0). \quad 105. \rho = a(1 + \cos \varphi).$$

$$106. x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2). \quad 107. xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y (x > 0, y > 0).$$

108. Найти момент инерции правильного треугольника со стороной a относительно прямой, проходящей через центр тяжести треугольника и составляющей угол α с его высотой.

Найти координаты центров тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями:

$$109. h^2(x^2 + y^2) = a^2 z^2, 0 < z < h. \quad 110. x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$$

$$111. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \pm 1, \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \pm 1, z = 0.$$

$$112. x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0). \quad 113. x^2 + y^2 = 2z, x + y = z.$$

Определить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных тел, ограниченных поверхностями, заданными уравнениями (параметры положительны):

$$114. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c. \quad 115. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$$

$$116. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

117. Найти ньютонов потенциал в точке $P = (0, 0, z)$ цилиндра $T = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 \leq a^2, 0 \leq \zeta \leq h\}$ постоянной плотности μ_0 .

118. Найти силу притяжения однородным шаровым сектором плотности μ_0 материальной точки с массой, равной единице, помещенной в его вершине, если радиус шаровой поверхности равен r , а угол осевого сечения сектора равен 2α .

§ 4. Интегрирование на многообразиях

4.1. Многообразия в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ и их ориентация.

Определение 1. Множество $M \subset \mathbb{R}^m$ называется *многообразием размерности* $p \leq m$, принадлежащим классу C^1 , если для каждой точки $a = (a_1, \dots, a_m)$, $a \in M$, и некоторой окрестности $S(a, \delta)$ существует окрестность $S(a_p, \delta_1)$ точки $a_p = (a_1, \dots, a_p)$ и такое отображение $\varphi : S(a_p, \delta_1) \rightarrow M \cap S(a, \delta)$ класса C^1 , что $\varphi_j(a_p) = a_j$, $j = p+1, m$, причем координаты точек $x \in M \cap S(a, \delta)$ удовлетворяют уравнениям

$$x_j = \varphi_j(x_p) = \varphi_j(x_1, \dots, x_p), \quad x_p \in S(a_p, \delta_1), j = p+1, m. \quad (1)$$

Определение 2. Параметрическим представлением множества $M \subset \mathbb{R}^m$ размерности $p \leq m$, принадлежащим классу C^1 , называется отображение $u \mapsto \Phi(u)$ открытого множества $O \subset \mathbb{R}^p$ в пространство $\mathbb{R}^m$, обладающее следующими свойствами:

- 1) Φ является гомеоморфизмом O на M ;
- 2) Φ является отображением $O \rightarrow \mathbb{R}^m$, принадлежащим классу C^1 ;

3) в каждой точке $u = (u_1, \dots, u_p)$, $u \in O$, отображение $d\Phi(u) \in L(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^m)$ имеет ранг p .

Последнее условие в определении 2 означает, что образ векторного пространства $\mathbb{R}^p$ при этом отображении является векторным подпространством в $\mathbb{R}^m$ размерности p , т.е. векторы $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$, линейно независимы в $\mathbb{R}^m$, в силу чего хотя бы один из определителей p -го порядка матрицы $\Phi'(u)$, составленной из элементов $\frac{\partial \Phi^i}{\partial u_j}(u)$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, p}$), отличен от нуля.

Теорема. Для того чтобы множество $M \subset \mathbb{R}^m$ было многообразием класса C^1 размерности $p \leq m$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a \in M$ существовала такая открытая окрестность $S(a, \delta)$, чтобы множество $M \cap S(a, \delta)$ допускало параметрическое представление размерности p , принадлежащее классу C^1 .

Если $p = 1$, то говорят, что M есть кривая класса C^1 (или гладкая кривая), а в случае $p = 2$ многообразие M называют поверхностью класса C^1 (или гладкой поверхностью).

В случае, когда $p = m - 1$, многообразие $M \subset \mathbb{R}^m$ называется гиперповерхностью.

Если $m = 3$, $p = 2$, то, для того чтобы в окрестности точки $a \in M$ множество $M \subset \mathbb{R}^3$ было гладкой поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два эквивалентных условия:

1) с точностью до перестановки координат x_1, x_2, x_3 в окрестности точки $a = (a_1, a_2, a_3)$ множество M задается уравнением $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$, где φ — функция класса C^1 в окрестности точки (a_1, a_2) и $\varphi(a_1, a_2) = a_3$;

2) в окрестности точки a множество M допускает параметризацию класса C^1

$$x_j = \varphi_j(u_1, u_2), \quad 1 \leq j \leq 3, \quad (u_1, u_2) \in S(\alpha, \delta), \quad x_j(\alpha) = a_j,$$

и при этом хотя бы один из определителей

$$\frac{D(\varphi_2, \varphi_3)}{D(u_1, u_2)}, \quad \frac{D(\varphi_3, \varphi_1)}{D(u_1, u_2)}, \quad \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u_1, u_2)}$$

отличен от нуля для всех точек $(u_1, u_2) \in S(\alpha, \delta)$.

Определение 3. Пусть отображение $u \mapsto \Phi(u)$, $u \in O$, $O \subset \mathbb{R}^p$, является параметрическим представлением множества $M \subset \mathbb{R}^m$ размерности $p \leq m$ класса C^1 в окрестности точки $a \in M$, причем $\Phi(\alpha) = a$, $\alpha \in O$. Тогда образ линейного отображения $d\Phi(\alpha) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть векторное подпространство размерности p . Это подпространство называется касательным пространством к многообразию M в точке a и обозначается $T_a(M)$.

Определение 4. Системой ориентаций $\mathcal{U}$ дифференцируемого многообразия M называется выбор для каждой точки $a \in M$ некоторой ориентации его векторного касательного пространства $T_a(M)$.

Определение 5. Многообразие $M \subset \mathbb{R}^m$ размерности $p \leq m$ класса C^1 называется ориентируемым, если оно имеет хотя бы одну непрерывную систему ориентаций, а выбор такой фиксированной системы ориентаций называется ориентацией многообразия M .

Если многообразие M является связным и ориентируемым, то оно обладает двумя возможными ориентациями, определяемыми выбором ориентации пространства $T_a(M)$.

Если $M \subset \mathbb{R}^m$ — гиперповерхность класса C^1 , то ее трансверсально ориентируют выбором непрерывного поля единичных нормалей $n(x)$, $x \in M$, а выбор одного из двух возможных направлений вектора n в произвольной точке $x \in M$ определяет трансверсальную ориентацию в целом.

Трансверсально ориентируемые гиперповерхности называются двусторонними.

Если, например, гладкая поверхность размерности $p = 2$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана уравнением

$$f(x, y, z) = z - \varphi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad D \subset \mathbb{R}^2,$$

то

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y), 1 \right).$$

следовательно, векторы

$$n(x, y, z) = \left(\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}} \right), \quad (2)$$

где $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$, $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$, определяют два непрерывных поля единичных нормалей к поверхности в каждой ее точке. Выбор определенного знака перед радикалом $\sqrt{1+p^2+q^2}$ в произвольной точке поверхности фиксирует одно из этих полей, а значит, и определенную сторону поверхности, т.е. ориентирует ее трансверсально.

Если гладкая поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ задана параметрически в виде

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in O, \quad O \subset \mathbb{R}^2,$$

то

$$n = \left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right),$$

где

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Если $M \subset \mathbb{R}^m$ — гладкая кривая, то ее касательная ориентация называется направлением обхода кривой, а положительным считается обход, при котором вектор скорости $\Phi'(t)$, $t \in]a, b[$, в каждой точке t является положительным в смысле ориентации в этой точке. Трансверсальная ориентация этой кривой определяется заданием направления вращения вокруг нее.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — ориентированное многообразие размерности $p = 2$ класса C^1 , а K — компакт, лежащий на этом многообразии. Обозначим через ∂K границу компакта K .

Определение 6. Компакт $K \subset M$ называется компактом с краем класса C^1 , если выполнены следующие условия:

1) ∂K в пространстве $\mathbb{R}^m$ является кусочно-гладкой кривой класса C^1 (эта кривая лежит на многообразии M и имеет в общем случае конечное множество угловых точек);

2) всякая точка $a \in \partial K$, отличная от угловой, имеет такую открытую окрестность $S(a, \delta)$ на многообразии M , что множество $S(a, \delta) \cap \partial K$ распадается на две связанные компоненты, одна из которых состоит из точек $S(a, \delta) \cap \partial K$, а другая — из точек окрестности $S(a, \delta)$, принадлежащих компактному K .

Ориентации многообразия M сопоставляем ориентацию гладких дуг края ∂K по следующему правилу: в каждой регулярной точке $a \in \partial K$ рассмотрим в касательной плоскости к многообразию вектор $\tau(a)$, касательный к ∂K в точке a , направленный в сторону, определяемую ориентацией края ∂K , и вектор $\nu(a)$, ортогональный к вектору $\tau(a)$, направленный в ту сторону, где лежат внутренние точки компакта K . В случае, когда $M \subset \mathbb{R}^3$, векторы $\tau(a)$, $\nu(a)$ и $N = [\tau(a), \nu(a)]$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$, ориентирующий его так же, как и канонический базис $\{i, j, k\}$ (рис. 14).

Если $M \subset \mathbb{R}^m$ — многообразие размерности $p \leq m$ класса C^1 , то всякое параметрическое представление Φ класса C^1 открытого множества $M \cap S(a, \delta)$ этого многообразия называется локальной картой класса C^1 , или просто картой. Множество $\Phi(O) = M \cap S(a, \delta)$ называется образом этой карты. Атласом многообразия M называется множество карт открытых множеств из M , образы которых покрывают M .

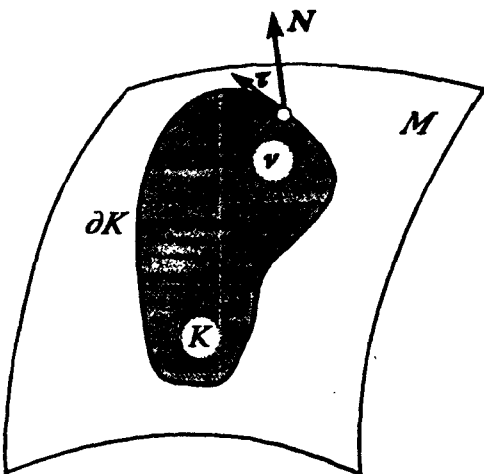


Рис. 14

4.2. Элемент p -мерного объема на многообразии $M \subset \mathbb{R}^m$ размерности $p \leq m$ класса C^1 .

Пусть $u \mapsto \Phi(u)$, $u \in \mathcal{O}$, — C^1 -гомеоморфизм области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$ на область $\Phi(\mathcal{O})$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, а отображение $d\Phi(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^m)$ имеет ранг p в каждой точке $u \in \mathcal{O}$. Тогда множество $M = \Phi(\mathcal{O})$ является многообразием размерности p класса C^1 . Отображение $d\Phi(u)$ в точке $u \in \mathcal{O}$ переводит систему p векторов базиса пространства $\mathbb{R}^p$ в систему линейно независимых векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$, из $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим на множестве $\mathcal{O}$ брус B с вершиной в точке $u \in \mathcal{O}$, построенный на векторах $du_j = e_j du_j$, $j = \overline{1, p}$, $du_j > 0$, где e_j — векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^p$. Объем этого бруса $V(B)$ равен произведению длин его ребер:

$$dV(B) = du_1 du_2 \dots du_p. \quad (1)$$

Образом вектора du_j при отображении $d\Phi(u)$ является вектор $\Phi'(u)e_j du_j = \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u) du_j$. Следовательно, дифференциал $d\Phi(u)$ отображает брус B_j на параллелепипед H с вершиной в точке $\Phi(u)$, построенный на векторах $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$.

Определение. Объем $dV(H)$ параллелепипеда H называется элементом p -мерного объема на многообразии M .

Согласно определению, имеем

$$dV(H) = \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_p}(u) \right)} du_1 du_2 \dots du_p, \quad (2)$$

где $\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_p}(u) \right)$ — определитель Грама от векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, p}$.

Пусть $m = 3$, $p = 2$, S — гладкая двусторонняя поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$. Обозначим через x, y, z координаты точки в $\mathbb{R}^3$ со стандартным базисом $\{i, j, k\}$. В окрестности каждой точки поверхности M рассмотрим ее параметрическое представление $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$, определяемое тремя функциями класса C^1

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

Так как поверхность S является многообразием размерности 2, то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

равен 2. Поэтому по меньшей мере один из якобианов

$$A = \frac{\mathcal{D}(y, z)}{\mathcal{D}(u, v)}, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z, x)}{\mathcal{D}(u, v)}, \quad C = \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)}$$

отличен от нуля во всех точках открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$.

Обозначим через dS элемент двумерного объема многообразия S и будем называть его элементом площади поверхности $S^{(1)}$. Согласно формуле (2), получим

$$dS = \sqrt{\begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle \end{vmatrix}} du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (4)$$

где

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

¹⁾ Об этом уже говорилось в пункте 3.2. Здесь строится мера на произвольном многообразии, частным случаем которой является dS .

— коэффициенты Гаусса.

Из тождества Лагранжа

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$

следует, что $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$, в силу чего имеем

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv. \quad (5)$$

В случае явного задания поверхности

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z(x, y), (x, y) \in D, D \subset \mathbb{R}^2\}$$

получаем

$$\Phi(x, y) = (x, y, z(x, y)), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$E = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \quad F^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \quad EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Следовательно,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (6)$$

Пусть $m = 3, p = 1, \gamma$ — ориентированная кривая. Элемент одномерного объема называется *элементом длины кривой* γ . Если координаты x, y, z точек кривой γ являются функциями $x(t), y(t), z(t)$ класса C^1 , производные которых $x'(t), y'(t), z'(t)$ нигде одновременно не обращаются в нуль в области изменения параметра t , то элемент длины кривой $dl(t)$ имеет вид

$$dl(t) = \sqrt{\langle \Phi'(t), \Phi'(t) \rangle} dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt, \quad (7)$$

где $\Phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (в предположении, что обход кривой γ в положительном направлении соответствует возрастанию параметра t).

4.3. Интегрирование на многообразии с краем. Криволинейные и поверхностные интегралы и их применения.

Пусть $K \subset M$ — многообразие с краем ∂K и $K = \Phi(D)$, где $D \subset \mathcal{O}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, — замкнутая область с гладкой границей $\partial D, x \mapsto f(x), x \in K$, — ограниченная числовая функция.

Определение 1. Если функция $\varphi = f \circ \Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на множестве D , то интеграл

$$\int_D \varphi(u) dV(H), \quad (1)$$

где $dV(H)$ — элемент p -мерного объема на многообразии M , называется *интегралом от функции f на компакте $K \subset M$ и обозначается*

$$\int_K f(x) dK. \quad (2)$$

Таким образом,

$$\int_K f(x) dK \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D \dots \int_D f(\Phi(u)) \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_p}(u) \right)} du_1 \dots du_p. \quad (3)$$

При $p = 1$ интеграл (3) называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции f на гладкой кривой $\gamma = \Phi(D)$, где $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$, и обозначается

$$\int_\gamma f(x) dl. \quad (4)$$

Поскольку $dl(t) = \sqrt{\langle \Phi'(t), \Phi'(t) \rangle} dt = \|\Phi'(t)\| dt = \sqrt{\sum_{i=1}^p \left(\frac{d\Phi_i}{dt}(t)\right)^2} dt$, $a \leq t \leq b$, то

$$\int_{\gamma} f(x) dl = \int_a^b f(\Phi(t)) \sqrt{\sum_{i=1}^p \left(\frac{d\Phi_i}{dt}(t)\right)^2} dt. \quad (5)$$

Если $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), a \leq t \leq b\}$, то

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt. \quad (6)$$

Если $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \varphi(t), y = \psi(t), a \leq t \leq b\}$, то

$$\int_{\gamma} f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (7)$$

Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой γ .

Если $p = 2$, то интеграл (3) называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции f на компакте K . Он не зависит от ориентации многообразия M .

При $p = 2$, $m = 3$ поверхностный интеграл первого рода обозначается

$$\iint_S f(x, y, z) dS. \quad (8)$$

Если $S = \Phi(D)$, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $D \subset \mathbb{R}^2$, то, согласно формуле (4), п.4.2, и формуле (3) настоящего пункта, имеем

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (9)$$

Если $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z(x, y), (x, y) \in D\}$, то

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\right)^2} dx dy. \quad (10)$$

Теорема. Интеграл (3) не зависит от выбора параметризации многообразия M .

Поскольку интеграл на многообразии сводится к интегралу Римана, то он обладает свойствами интеграла Римана.

Если кривая $\gamma = \Phi([a, b])$ кусочно-гладкая, то существует такое разбиение $\Pi = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ сегмента $[a, b]$, что $\gamma = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$, где $\gamma_i = \Phi([t_i, t_{i+1}])$ — гладкие кривые. Для этого случая полагаем

$$\int_{\gamma} f(x) dl \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} f(x) dl. \quad (11)$$

Если поверхность $M = \Phi(O)$, $O \subset \mathbb{R}^2$, не является гладкой, но существует такое представление $O = \bigcup_{i=1}^n O_i$, где O_i — области в $\mathbb{R}^2$ без общих внутренних точек, что каждое множество $M_i = \Phi(O_i)$ является поверхностью класса C^1 , то множество M будем называть

кусочно-гладкой поверхностью. Если $K \subset M$ и $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция, то полагаем

$$\int_K f(x) dK \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{K_i} f(x) dK_i, \quad (12)$$

в предположении, что внутренность каждого компакта K_i является поверхностью класса C^1 и что все интегралы, входящие в сумму в правой части этой формулы, существуют.

Пусть вдоль гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ ($\gamma \subset \mathbb{R}^2$) распределена масса с линейной плотностью $f(x, y, z)$ ($f(x, y)$), интегрируемой на γ . Тогда масса m этой кривой численно равна криволинейному интегралу первого рода

$$m = \int_{\gamma} f(x, y, z) dl \quad \left(m = \int_{\gamma} f(x, y) dl \right). \quad (13)$$

Если на гладкой или кусочно-гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ распределена масса с поверхностной плотностью $f(x, y, z)$, интегрируемой на S , то интеграл (8) равен численному значению массы этой поверхности.

Статическими моментами M_x, M_y и моментами инерции I_x, I_y относительно осей координат Ox и Oy гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, вдоль которой распределена масса с линейной плотностью $p(x, y)$, интегрируемой на γ , называются интегралы

$$M_x = \int_{\gamma} yp(x, y) dl, \quad M_y = \int_{\gamma} xp(x, y) dl, \quad I_x = \int_{\gamma} y^2 p(x, y) dl, \quad I_y = \int_{\gamma} x^2 p(x, y) dl, \quad (14)$$

а координаты центра тяжести этой кривой вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{1}{m} \int_{\gamma} xp(x, y) dl, \quad y_C = \frac{1}{m} \int_{\gamma} yp(x, y) dl, \quad (15)$$

где $m = \int_{\gamma} p(x, y) dl$ — масса кривой γ .

Если кривая γ однородна, то полагают $p(x, y) = 1$, а ее статические моменты и моменты инерции относительно осей координат называются *геометрическими*.

Статическими моментами $M_{xOy}, M_{yOx}, M_{zOx}$ относительно координатных плоскостей гладкой или кусочно-гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, по которой распределена масса с поверхностной плотностью $p(x, y, z)$, интегрируемой на S , называются интегралы

$$M_{xOy} = \iint_S zp(x, y, z) dS, \quad M_{yOx} = \iint_S xp(x, y, z) dS, \quad M_{zOx} = \iint_S yp(x, y, z) dS, \quad (16)$$

а координаты центра тяжести $C(x_C, y_C, z_C)$ этой поверхности вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{1}{m} \iint_S xp(x, y, z) dS, \quad y_C = \frac{1}{m} \iint_S yp(x, y, z) dS, \quad z_C = \frac{1}{m} \iint_S zp(x, y, z) dS, \quad (17)$$

где $m = \iint_S p(x, y, z) dS$ — масса поверхности S .

Пусть m_0 — масса, сосредоточенная в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, не лежащей на поверхности S . Тогда сила F , с которой материальная поверхность S притягивает материальную точку с массой m_0 , может быть вычислена по формуле

$$F = \kappa m_0 \iint_S p(x, y, z) \frac{r}{r^3} dS, \quad (18)$$

где κ — постоянная тяготения,

$$r = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad r = |r| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Моментом инерции I_z материальной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ относительно оси Oz называется интеграл

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) p(x, y, z) dS. \quad (19)$$

Дадим определение криволинейных и поверхностных интегралов второго рода.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — ориентированное многообразие размерности $p < m$ класса C^1 , заданное в виде $M = \Phi(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, где Φ — отображение класса C^1 области $\mathcal{O}$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$. Если M — многообразие размерности $p = 1$ и $\gamma \in M$, где $\gamma = \Phi([a, b])$ — гладкая кривая, то касательная ориентация этой кривой называется *направлением ее обхода*, а *положительным* считается обход, при котором вектор $\Phi'(t)$ в каждой точке $t \in]a, b[$ является положительным в смысле ориентации в этой точке. Поскольку кривая γ принадлежит классу C^1 , то

$$\|\Phi'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in]a, b[, \quad \text{где } \|\Phi'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\Phi'_i(t))^2}.$$

Пусть $x \mapsto F(x)$, $x \in \gamma$, — вектор-функция с ограниченными компонентами F_i ($i = \overline{1, m}$), $\tau(x) = \frac{\Phi'(t)}{\|\Phi'(t)\|} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m)$ — единичный касательный вектор к кривой γ в точке $x = \Phi(t)$, $t \in]a, b[$, положительный в смысле ориентации этой кривой. Рассмотрим числовую функцию $x \mapsto \langle F(x), \tau(x) \rangle$, $x \in \gamma$, где $\langle F, \tau \rangle$ — скалярное произведение векторов F и τ , и предположим, что существует криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{\gamma} \langle F(x), \tau(x) \rangle dl = \int_{\gamma} (F_1(x) \cos \alpha_1 + F_2(x) \cos \alpha_2 + \dots + F_m(x) \cos \alpha_m) dl. \quad (20)$$

Определение 2. Интеграл (20) называется *общим криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции F на ориентированной кривой γ* и обозначается

$$\int_{\gamma} F_1(x) dx_1 + F_2(x) dx_2 + \dots + F_m(x) dx_m. \quad (21)$$

Исходя из определения криволинейного интеграла первого рода, получаем

$$\int_{\gamma} \langle F(x), \tau(x) \rangle dl = \int_a^b \left\langle F(\Phi(t)), \frac{\Phi'(t)}{\|\Phi'(t)\|} \right\rangle \|\Phi'(t)\| dt = \int_a^b \sum_{i=1}^m F_i(\Phi(t)) \Phi'_i(t) dt, \quad (22)$$

если положительному обходу кривой γ соответствует возрастание параметра t .

Таким образом, согласно определению, имеем

$$\int_{\gamma} \sum_{i=1}^m F_i(x) dx_i = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m F_i(\Phi(t)) \Phi'_i(t) \right) dt. \quad (23)$$

Наряду с общим криволинейным интегралом второго рода рассматривают также криволинейные интегралы частного вида

$$\int_{\gamma} F_i(x) dx_i. \quad (24)$$

Если кривая γ замкнута, то криволинейный интеграл второго рода

$$\oint_{\gamma} \langle F(x), \tau(x) \rangle dl \quad (25)$$

называется *циркуляцией вектора F вдоль кривой γ* .

Если $M \subset \mathbb{R}^m$ — многообразие размерности $p = m - 1$, т.е. гиперповерхность класса C^1 , трансверсально ориентированная выбором одного из двух непрерывных полей единичных нормалей $n(x)$, $x \in M$, то $\dot{n}(x) = \frac{N(x)}{\pm \|N(x)\|}$, где $N(x)$ — вектор нормали к гиперповерхности M в точке $x = \Phi(u)$, $u \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{m-1}$,

$$\|N(x)\| = \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}}(u) \right)}, \quad \Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}}(u) \right)$$

— определитель Грама от векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial u_j}(u)$, $j = \overline{1, m-1}$.

Предположим, что на компакте $K \subset M$ с краем ∂K , где $K = \Phi(D)$, $D \subset \mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{m-1}$, задана вектор-функция $x \mapsto F(x)$ с ограниченными компонентами $F_i(x)$, $i = \overline{1, m}$, и что существует поверхностный интеграл первого рода

$$\int_K \langle F(x), n(x) \rangle dK. \quad (26)$$

Определение 3. Интеграл (26) называется *общим поверхностным интегралом второго рода на ориентированной гиперповерхности K и обозначается*

$$\int_K F_1(x) dx_2 dx_3 \dots dx_m + F_2(x) dx_1 dx_3 \dots dx_m + \dots + F_m(x) dx_1 dx_2 \dots dx_{m-1}. \quad (27)$$

Если $K \subset \mathbb{R}^3$, $K = S = \Phi(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$, $F = (P, Q, R)$, то, согласно определению, имеем

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy &= \iint_S \langle F(x, y, z), n(x, y, z) \rangle dS = \\ &= \pm \iint_D (P(\Phi(u, v))A + Q(\Phi(u, v))B + R(\Phi(u, v))C) du dv, \end{aligned} \quad (28)$$

поскольку $dS = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, $A = \frac{\mathcal{D}(y, z)}{\mathcal{D}(u, v)}$, $B = \frac{\mathcal{D}(z, x)}{\mathcal{D}(u, v)}$, $C = \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(u, v)}$, $n(x, y, z) = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A, B, C)$ (см. формулу (3), п.4.1, и формулу (5), п.4.2).

Если $S = \Phi(D)$, где $\Phi(x, y) = (x, y, z(x, y))$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, то формула (28) принимает вид

$$\begin{aligned} \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \\ &= \pm \iint_D \left(-\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)P(x, y, z(x, y)) - \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)Q(x, y, z(x, y)) + R(x, y, z(x, y)) \right) dx dy, \end{aligned} \quad (29)$$

поскольку в рассматриваемом случае имеем

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Криволинейный интеграл второго рода имеет физический смысл работы силового векторного поля $\mathbf{F}$, а поверхностный интеграл второго рода — потока векторного поля $\mathbf{F}$ через поверхность S .

Заметим, что криволинейные и поверхностные интегралы второго рода зависят от ориентации кривой γ и поверхности S : при изменении направления обхода кривой γ и изменении трансверсальной ориентации поверхности S скалярные произведения $\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\tau} \rangle$, $\langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle$ меняют знаки на противоположные.

4.4. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от выбора пути интегрирования.

Если дифференциальная форма $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u , т.е. в некоторой области, содержащей кривую $\gamma = AB$, выполняется равенство $P dx + Q dy = du$, то интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A) \quad (1)$$

не зависит от выбора пути интегрирования, соединяющего точку A с точкой B .

Если функции P и Q определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, в которой выполняется равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (2)$$

то дифференциальная форма $\omega = P dx + Q dy$ является полным дифференциалом некоторой функции u и криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy \quad (3)$$

не зависит от выбора пути интегрирования из точки A в точку B , лежащего в D . Равенство (2) является необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла (3) от пути интегрирования, лежащего в односвязной области D .

Для того чтобы дифференциальная форма

$$\omega = P dx + Q dy + R dz$$

была полным дифференциалом некоторой функции w в замкнутой односвязной области $K \subset \mathbb{R}^3$, необходимо и достаточно, чтобы в K выполнялись условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (4)$$

В этом случае интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz \quad (5)$$

не зависит от выбора пути интегрирования, если кривая $\gamma = AB$ лежит в K .

Если в односвязных замкнутых областях $D \subset \mathbb{R}^2$ и $K \subset \mathbb{R}^3$ выполняются условия (2) и (4), то

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = du, \quad P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = dw,$$

а функции u и w можно найти по формулам

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt + C, \quad (6)$$

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt + C, \quad (7)$$

где (x_0, y_0) и (x_0, y_0, z_0) — фиксированные точки областей D и K , C — произвольная постоянная.

Вычислить следующие криволинейные интегралы первого рода:

123. $I = \int_{\gamma} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl$, где γ — дуга астроида, заданной уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$.

◀ Параметрические уравнения астроида имеют вид

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

поэтому, согласно формуле (7), п.4.3, имеем

$$I = 3a^{\frac{7}{3}} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) |\sin t \cos t| dt,$$

так как

$$x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{4}{3}} (\cos^4 t + \sin^4 t), \quad dl = \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = 3a |\sin t \cos t| dt.$$

Поскольку подынтегральная функция является $\frac{\pi}{2}$ -периодической, то

$$I = 12a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \sin t \cos t dt = 2a^{\frac{7}{3}} (\cos^6 t - \sin^6 t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^{\frac{7}{3}}. \blacktriangleright$$

124. $I = \int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = ax\}, a > 0$.

◀ Перейдя к полярным координатам, получим уравнение окружности γ в виде $\rho = a \cos \varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Взяв в качестве параметра полярный угол φ , найдем параметрические уравнения окружности γ :

$$x = a \cos^2 \varphi, \quad y = a \cos \varphi \sin \varphi \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

На окружности γ имеем $\sqrt{x^2 + y^2} = a \cos \varphi$. Поскольку $dl = a d\varphi$, то, согласно формуле (7), п.4.3, получим

$$I = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2a^2. \blacktriangleright$$

125. $I = \int_{\gamma} x^2 dl$, где γ — окружность, полученная в результате пересечения сферы

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ и плоскости, заданной уравнением $x + y + z = 0$.

◀ Плоскость проходит через начало координат и пересекается со сферой S по окружности радиуса a , длина которой равна $2\pi a$. Производя циклические перестановки, легко убедиться в справедливости равенств

$$\int_{\gamma} x^2 dl = \int_{\gamma} y^2 dl = \int_{\gamma} z^2 dl,$$

из которых получаем интеграл I в виде

$$I = \frac{1}{3} \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) dl.$$

На окружности γ выполнено равенство $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, в силу которого имеем $I = \frac{2}{3} \pi a^3$, так как

$$\int_{\gamma} dl = 2\pi a. \blacktriangleright$$

126. $I = \int_{\gamma} z dl$, где γ — кривая, полученная в результате пересечения поверхностей, заданных уравнениями $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$, пробегаемая от точки $O = (0, 0, 0)$ до точки $A = (a, a, a\sqrt{2})$.

◀ В качестве параметра выберем переменную x . Тогда параметрические уравнения кривой γ примут вид

$$x = x, \quad y = \sqrt{ax}, \quad z = \sqrt{x^2 + ax} \quad (0 \leq x \leq a).$$

Поскольку

$$dz = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax}} dx, \quad dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x}} dx, \quad dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2 + (z'(x))^2} dx,$$

то, применив формулу (6), п. 4.3, получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{\left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{17}{32}a^2} dx = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}}\right) \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2} - \frac{17}{32}a^2 \ln \left(2\sqrt{2}x + \frac{9a}{4\sqrt{2}} + \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}\right) \right) \Big|_0^a = \\ &= \frac{a^2}{256\sqrt{2}} \left(100\sqrt{38} - 72 - 17 \ln \frac{25 + 4\sqrt{38}}{17} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Найти длины пространственных кривых (параметры считать положительными), заданных уравнениями:

127. $(x - y)^2 = a(x + y)$, $x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ от точки $O = (0, 0, 0)$ до точки $A = (x_0, y_0, z_0)$.

◀ Параметризуем кривую, полагая $x + y = t(x - y)$. Тогда из уравнений кривой получаем $x - y = at$, $x + y = at^2$, $\frac{9}{8}z^2 = a^2t^3$ ($t \geq 0$), откуда

$$x = \frac{a}{2}(t^2 + t), \quad y = \frac{a}{2}(t^2 - t), \quad |z| = \frac{2\sqrt{2}}{3}at^{\frac{3}{2}}.$$

При этом точке O соответствует значение $t = 0$, точке A — значение $t_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{a}\right)^{\frac{2}{3}} z_0^{\frac{2}{3}}$. Обозначая через L искомую длину кривой, получим

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{t_0} \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2} = \sqrt{2a} \int_0^{t_0} \left(t + \frac{1}{2}\right) dt = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}(t^2 + t) \Big|_0^{t_0} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

128. $x^2 + y^2 = cz$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ от точки $O = (0, 0, 0)$ до точки $A = (x_0, y_0, z_0)$.

◀ Параметризуем кривую, взяв в качестве параметра полярный угол φ . Полагая $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, получаем $\rho^2 = cz$, $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$, откуда $z = c\varphi$, $\rho^2 = c^2\varphi$. Параметрические уравнения кривой принимают вид

$$x = c\sqrt{\varphi} \cos \varphi, \quad y = c\sqrt{\varphi} \sin \varphi, \quad z = c\varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{z_0}{c}\right).$$

Вычисляя дифференциал кривой $dl = c \left(\sqrt{\varphi} + \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \right) d\varphi$ и интегрируя полученное выражение в пределах от 0 до $\frac{z_0}{c}$, находим

$$L = \sqrt{cz_0} \left(\frac{2z_0}{3c} + 1 \right). \blacktriangleright$$

129. Найти массу m дуги параболы $\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2px, 0 \leq x \leq \frac{p}{2} \right\}$, если ее линейная плотность $p(x, y)$ в текущей точке (x, y) равна $|y|$.

◀ Вычислим дифференциал dl по формуле $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx$. Принимая во внимание равенство $p(x, y) = |y| = \sqrt{2px}$ и симметрию точек параболы относительно оси Ox , находим

$$m = \int_{\gamma} \rho(x, y) dl = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px + p^2} dx = \frac{2}{3p} (2px + p^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{2}{3} p^2 (2\sqrt{2} - 1). \blacktriangleright$$

130. Найти массу m кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^3$, заданной уравнениями $x = at$, $y = \frac{at^2}{2}$, $z = \frac{at^3}{3}$ ($0 \leq t \leq 1$), линейная плотность которой меняется по формуле $p(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.

◀ Согласно формуле (13), п.4.3, имеем

$$m = \int_{\gamma} p(x, y, z) dl = \int_0^1 p(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Поскольку $p(x(t), y(t), z(t)) = t$, $dl = a\sqrt{1+t^2+t^4} dt$, то

$$\begin{aligned} m &= a \int_0^1 t \sqrt{1+t^2+t^4} dt = \frac{a}{2} \int_0^1 \sqrt{\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} d\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{a}{4} \left(\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1+t^2+t^4} + \frac{3}{4} \ln \left(t^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{1+t^2+t^4}\right) \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{a}{8} \left((3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2} \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

131. Найти координаты центра тяжести однородной кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, заданной уравнением $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ от точки $A = (0, a)$ до точки $B = (b, h)$ ($a > 0$, $b > 0$, $h > 0$).

◀ Воспользуемся формулами (15), п.4.3. Поскольку кривая γ однородна, то в формулах (15), п.4.3, следует взять $p(x, y) = 1$. Имеем

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx,$$

$$m = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = a \sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1} = \sqrt{h^2 - a^2},$$

$$x_0 = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x dl = \frac{1}{m} \int_0^b x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{m} \left(ax \operatorname{sh} \frac{x}{a} - a^2 \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right) \Big|_0^b = \frac{a}{m} \left(b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} + a \right) =$$

$$= \frac{a}{m} \left(b \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} - h + a \right) = \frac{a}{m} \left(\frac{b}{a} \sqrt{h^2 - a^2} - h + a \right) = b - a \sqrt{\frac{h-a}{h+a}},$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \int_{\gamma} y dl = \frac{1}{m} \int_0^b y(x) \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{a}{m} \int_0^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{a}{2m} \int_0^b \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a} \right) dx =$$

$$= \frac{a}{2m} \left(x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \right) \Big|_0^b = \frac{a}{2m} \left(b + a \operatorname{sh} \frac{b}{a} \operatorname{ch} \frac{b}{a} \right) = \frac{a}{2m} \left(b + \frac{h \sqrt{h^2 - a^2}}{a} \right) = \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2 - a^2}}. \blacktriangleright$$

132. Найти координаты центра тяжести контура однородного сферического треугольника

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

◀ Сферический треугольник однороден, в силу чего имеем

$$x_C = \frac{1}{m} \int_{\gamma} x dl, \quad y_C = \frac{1}{m} \int_{\gamma} y dl, \quad z_C = \frac{1}{m} \int_{\gamma} z dl,$$

где γ — контур треугольника, $m = \frac{3}{2}\pi a$ — его длина.

В плоскости yOz выполняется тождество $x \equiv 0$, поэтому

$$x_C = \frac{1}{m} \left(\int_{\gamma_1} x dl + \int_{\gamma_2} x dl \right),$$

где γ_1 — часть кривой γ , лежащая в плоскости xOy , γ_2 — та ее часть, которая лежит в плоскости xOz . Кривые γ_1 и γ_2 можно задать соответственно параметрическими уравнениями

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

$$x = a \cos \psi, \quad y = a \sin \psi \quad \left(0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

причем $dl = a d\varphi$ на γ_1 и $dl = a d\psi$ на γ_2 . Поэтому

$$x_C = \frac{1}{m} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \psi d\psi \right) = \frac{2a^2}{m} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Аналогично, $y_C = z_C = \frac{4a}{3\pi}$. ▶

133. Найти статические моменты дуги γ однородной астроиды, заданной уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x \geq 0, y \geq 0$, относительно осей координат.

◀ Воспользуемся формулами (14), п.4.3, полагая в них $p(x, y) = 1$. Записав параметрические уравнения астроиды в виде $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) и принимая во внимание решение примера 123, имеем

$$M_x = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \frac{3}{5}a^2, \quad M_y = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt = \frac{3}{5}a^2. \blacktriangleright$$

134. Найти момент инерции однородной окружности $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$ относительно ее диаметра.

◀ Момент инерции однородной окружности γ совпадает с I_x или I_y (см. формулы (14), п.4.3), если система координат xOy выбрана так, что диаметр окружности γ является отрезком оси Ox , а начало координат совпадает с центром окружности. Принимая во внимание однородность окружности γ , имеем

$$I = I_x = \int_{\gamma} y^2 dl = a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi a^3$$

(при вычислении интеграла воспользовались параметрическими уравнениями окружности $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, и равенством $dl = a d\varphi$). ▶

135. Найти полярный момент инерции

$$I_0 = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) dl$$

относительно точки $O = (0, 0)$ однородного контура квадрата

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = a\}.$$

◀ Контур квадрата γ образован отрезками прямых, заданных уравнениями $y = \pm a$, $x = \pm a$. Если $x = \pm a$, то $x^2 + y^2 = a^2 + y^2$, $-a \leq y \leq a$, $dl = dy$. Если же $y = \pm a$, то $x^2 + y^2 = x^2 + a^2$, $-a \leq x \leq a$, $dl = dx$.

Заменяв криволинейный интеграл I_0 соответствующим интегралом Римана, получим

$$I_0 = 2 \left(\int_{-a}^a (a^2 + y^2) dy + \int_{-a}^a (a^2 + x^2) dx \right) = \frac{32}{3} a^3. \quad \blacktriangleright$$

136. Найти моменты инерции относительно координатных осей одного витка однородной винтовой линии

$$\gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{ht}{2\pi}, 0 \leq t \leq 2\pi \right\}.$$

◀ Обозначив через r_x , r_y , r_z расстояния от точки $M = (x, y, z)$, лежащей на однородной кривой γ , до соответствующих осей координат, можем написать формулы для вычисления моментов инерции:

$$I_x = \int_{\gamma} r_x^2 dl, \quad I_y = \int_{\gamma} r_y^2 dl, \quad I_z = \int_{\gamma} r_z^2 dl.$$

Воспользуемся очевидными равенствами $r_x^2 = y^2 + z^2$, $r_y^2 = x^2 + z^2$, $r_z^2 = x^2 + y^2$; следовательно, $r_x^2 = a^2 \sin^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2}$, $r_y^2 = a^2 \cos^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2}$, $r_z^2 = a^2$. Поскольку

$$dl = \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2 + (dz(t))^2} = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi} dt,$$

то

$$I_x = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a^2 \sin^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2} \right) dt = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2},$$

$$I_y = \frac{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cos^2 t + \frac{h^2 t^2}{4\pi^2} \right) dt = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}.$$

$$I_z = \frac{a^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = a^2 \sqrt{h^2 + 4\pi^2 a^2}. \blacktriangleright$$

137. Вычислить логарифмический потенциал простого слоя

$$u(x, y) = \oint_{\gamma} \kappa \ln \frac{1}{r} dl,$$

где $\kappa = \text{const}$, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ и контур γ является окружностью, заданной уравнением $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

◀ Перейдем к новой системе координат $\xi'O\eta'$, выбрав последнюю так, чтобы ее начало совпадало с началом координат системы $\xi O\eta$ и чтобы точка (x, y) находилась на оси $O\xi'$. Тогда получим

$$u(x, y) = \oint_{\gamma'} \kappa \ln \frac{1}{r'} dl',$$

где $\gamma' = \{(\xi', \eta') \in \mathbb{R}^2 : \xi'^2 + \eta'^2 = R^2\}$, $r' = \sqrt{(\xi' - \rho)^2 + \eta'^2}$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Параметрические уравнения окружности имеют вид $\xi' = R \cos \varphi$, $\eta' = R \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а $dl = R d\varphi$. Следовательно,

$$u(x, y) = -\frac{R\kappa}{2} \int_0^{2\pi} \ln(R^2 - 2R\rho \cos \varphi + \rho^2) d\varphi = -2\pi R\kappa \ln R - \frac{R\kappa}{2} \int_0^{2\pi} \ln \left(1 - \frac{2\rho}{R} \cos \varphi + \frac{\rho^2}{R^2} \right) d\varphi.$$

Обозначив $\frac{\rho}{R} = \alpha$, вычислим интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2) d\varphi.$$

Дифференцируя по параметру α , получаем

$$I'(\alpha) = 2 \int_0^{2\pi} \frac{(\alpha - \cos \varphi) d\varphi}{1 - 2\alpha \cos \varphi + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{2z\bar{z} - (z + \bar{z})}{(1 - z)(1 - \bar{z})} d\varphi,$$

где $z = \alpha e^{i\varphi}$, $\bar{z} = \alpha e^{-i\varphi}$. Если $\alpha < 1$, то

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(\frac{z}{1-z} + \frac{\bar{z}}{1-\bar{z}} \right) d\varphi = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} (z + z^2 + \dots + z^n + \dots + \bar{z} + \bar{z}^2 + \dots + \bar{z}^n + \dots) d\varphi = \\ &= -\frac{2}{\alpha} \int_0^{2\pi} (\alpha \cos \varphi + \alpha^2 \cos 2\varphi + \dots + \alpha^n \cos n\varphi + \dots) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Почленное интегрирование ряда возможно, поскольку он сходится равномерно. Таким образом, $I(\alpha) = C$, $C = I(0) = 0$, в силу чего имеем $u(x, y) = -2\pi R\kappa \ln R = 2\pi R\kappa \ln \frac{1}{R}$, если $\rho < R$. Если $\rho > R$, то $\alpha > 1$, и при этом получим

$$I'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{1}{\bar{z}}} \right) d\varphi = \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots + \frac{1}{\bar{z}} + \dots + \frac{1}{\bar{z}^n} + \dots \right) d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\alpha} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\cos \varphi}{\alpha} + \frac{\cos 2\varphi}{\alpha^2} + \dots + \frac{\cos n\varphi}{\alpha^n} + \dots \right) d\varphi = \frac{4\pi}{\alpha},$$

$$I(\alpha) = 4\pi \ln \alpha + C, \quad C = I(1) = 0, \quad I(\alpha) = 4\pi \ln \alpha,$$

$$u(x, y) = -2\pi R \kappa \ln R - 2\pi R \kappa \ln \frac{\rho}{R} = 2\pi R \kappa \ln \frac{1}{\rho}. \blacktriangleright$$

Вычислить следующие криволинейные интегралы второго рода, взятые вдоль указанных кривых в направлении возрастания параметра:

138. $I = \int_{\gamma} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, |x| \leq 1\}$.

◀ Воспользуемся формулой (7), п.4.3, где роль параметра t играет переменная x . Подставляя в подынтегральное выражение $y = x^2$ и $dy = 2x dx$, получаем интеграл Римана

$$I = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4) dx = -\frac{14}{15}. \blacktriangleright$$

139. $I = \int_{\gamma} (2a - y) dx + x dy$, где γ — арка циклоиды, заданной уравнениями $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

◀ На кривой γ выполняется равенство

$$(2a - y) dx + x dy = (2a - a(1 - \cos t)) d(a(t - \sin t)) + a(t - \sin t) d(a(1 - \cos t)) = a^2 t \sin t dt.$$

Применив формулу (23), п.4.3, получим

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 (t \cos t|_{2\pi}^0 + \sin t|_0^{2\pi}) = -2\pi a^2. \blacktriangleright$$

140. $\oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, где $ABCD$ — контур квадрата с вершинами $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$, $D = (0, -1)$.

◀ Из свойства аддитивности криволинейного интеграла следует равенство

$$I = \int_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{BC} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{CD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{DA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}.$$

На отрезках AB и CD выполняются соответственно равенства $x + y = 1$ и $x + y = -1$, $dx + dy = 0$, откуда следует, что криволинейные интегралы на этих отрезках равны нулю. На отрезках BC и DA соответственно имеем $y - x = 1$ и $y - x = -1$, $dy = dx$, $|x| + |y| = 1$. Если $(x, y) \in BC$, то x убывает от 0 до -1 ; если $(x, y) \in DA$, то x возрастает от 0 до 1. Следовательно,

$$I = 2 \int_0^{-1} dx + 2 \int_0^1 dx = -2 + 2 = 0. \blacktriangleright$$

141. Доказать, что для криволинейного интеграла справедлива оценка

$$\left| \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \right| \leq LM,$$

где L — длина кривой γ и $M = \max_{(x,y) \in \gamma} \sqrt{P^2(x,y) + Q^2(x,y)}$.

◀ Без ограничения общности можно считать кривую γ гладкой (если γ — кусочно-гладкая кривая, то интеграл можно представить в виде суммы интегралов по гладким кривым). Согласно определению криволинейного интеграла второго рода, имеем

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\gamma} (F, \tau) dl,$$

где $F = (P, Q)$, τ — единичный касательный вектор к кривой γ . Из оценки $|(F, \tau)| \leq |F| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ получаем неравенство

$$\left| \int_{\gamma} P dx + Q dy \right| \leq \int_{\gamma} \sqrt{P^2(x,y) + Q^2(x,y)} dl \leq \max_{(x,y) \in \gamma} \sqrt{P^2(x,y) + Q^2(x,y)} \int_{\gamma} dl = LM. \blacktriangleright$$

142. Оценить интеграл $I_R = \oint_{\gamma} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2}$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$.

Доказать, что $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0$.

◀ Для оценки интеграла воспользуемся неравенством, доказанным в предыдущем примере. Здесь

$$P(x, y) = \frac{y}{(x^2 + xy + y^2)^2}, \quad Q(x, y) = \frac{-x}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

$$\sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

Следовательно, $I_R \leq 2\pi R \cdot \max_{(x,y) \in \gamma} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + xy + y^2)^2}$.

Приняв во внимание параметрические уравнения окружности $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, получим оценку

$$\max_{(x,y) \in \gamma} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \frac{1}{R^3 (1 + \sin \varphi \cos \varphi)^2} = \frac{4}{R^3},$$

которая следует из неравенства

$$\frac{1}{(1 + \sin \varphi \cos \varphi)^2} = \frac{4}{(2 + \sin 2\varphi)^2} \leq 4, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Окончательно получаем оценку $|I_R| \leq \frac{8\pi}{R^3}$, из которой следует предельное соотношение $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_R = 0$. $\blacktriangleright$

Вычислить криволинейные интегралы второго рода:

143. $I = \int_{\gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, где

γ — окружность, полученная в результате пересечения сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ и плоскости S_1 , заданной уравнением $y = x \operatorname{tg} \alpha$, пробегаемая в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x .

◀ Окружность γ с центром в начале координат лежит в плоскости S_1 , и ее радиус равен a . Пусть φ — угол между радиусом окружности и прямой, заданной уравнениями $y = x \operatorname{tg} \alpha$, $z =$

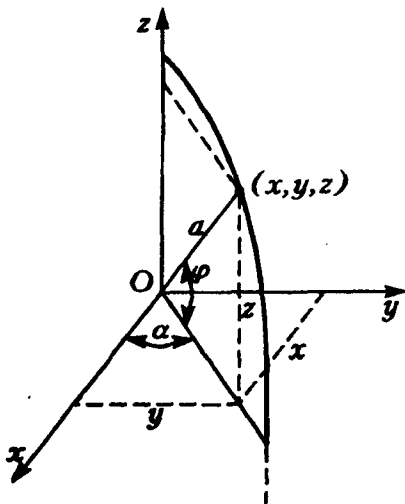


Рис. 15

0 (рис. 15). Тогда можем параметризовать окружность γ следующим образом:

$$x = a \cos \alpha \cos \varphi, \quad y = a \sin \alpha \cos \varphi, \quad z = a \sin \varphi \\ (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Приводя криволинейный интеграл к интегралу Римана, получим

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} (\cos \alpha - \sin \alpha) d\varphi = 2\sqrt{2}\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). \triangleright$$

144. $I = \int_{\gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, где γ — часть кривой Вивиаки $\gamma = S_1 \cap S_2$, $S_1 =$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = ax\}$, $z \geq 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной части ($x > a$) оси Ox .

« Переходя к полярным координатам, получим уравнение кривой Вивиаки в виде

$$\rho = a \cos \varphi, \quad z = \sqrt{a^2 - \rho^2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Принимая во внимание это уравнение и выбирая в качестве параметра полярный угол φ , имеем

$$x = a \cos^2 \varphi, \quad y = a \sin \varphi \cos \varphi, \quad z = a |\sin \varphi| \quad \left(|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Для вычисления криволинейного интеграла I приведем его к интегралу Римана, вычислив значение подынтегрального выражения в точках параметризованной кривой γ . Получим

$$dx = -2a \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \quad dy = a(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi, \quad dz = \operatorname{sgn} \varphi (a \cos \varphi) d\varphi, \quad \varphi \neq 0, \\ y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = a^3 (-2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi + \operatorname{sgn} \varphi \cos^5 \varphi) d\varphi, \quad \varphi \neq 0.$$

Принимая во внимание равенство

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2 \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + \operatorname{sgn} \varphi \cos^5 \varphi) d\varphi = 0,$$

находим

$$I = a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \varphi - 2 \sin^4 \varphi) d\varphi = \\ = a^3 \left(B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - 2B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \right) = a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\pi a^3}{4}. \triangleright$$

145. $I = \int_{\gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$,

где γ — контур, который ограничивает часть сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, пробегаемый так, что внешняя сторона этой поверхности остается слева.

« Представим интеграл на ориентированной кривой γ в виде суммы интегралов по ориентированным кривым γ_j , $j = 1, 2, 3$, лежащим в координатных плоскостях (рис. 16). Каждая кривая γ_j представляет собой четверть

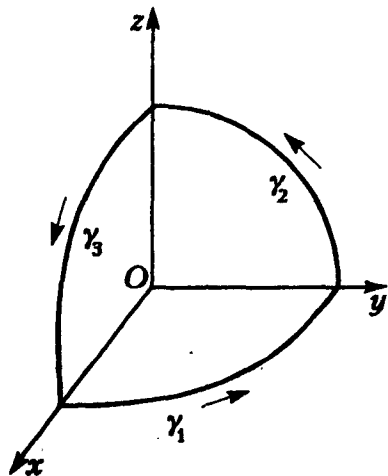


Рис. 16

окружности радиуса 1 с центром в начале координат. В плоскости xOy выполняются равенства $z = 0$, $dz = 0$, в силу чего на кривой γ подынтегральное выражение ω принимает вид $\omega = y^2 dx - x^2 dy$. Записав параметрические уравнения кривой γ_1 в виде

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

получим

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_1} y^2 dx - x^2 dy = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi) d\varphi = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = -\frac{4}{3}.$$

Вполне очевидно, $\int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = -\frac{4}{3}$. Следовательно, $I = 3 \int_{\gamma_1} \omega = -4$. ►

При решении примеров 146—151 будем пользоваться независимостью криволинейного интеграла второго рода от выбора пути интегрирования, соединяющего две точки, если подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции в односвязной области D , содержащей кривую, по которой вычисляется интеграл. Если известна такая функция u , что $du = P dx + Q dy$, то можем сразу написать

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy = u(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0).$$

Если вид функции u нам неизвестен и в данной односвязной области D выполнено равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то, пользуясь свойством независимости криволинейного интеграла от выбора пути интегрирования из точки (x_0, y_0) в точку (x_1, y_1) , лежащего в D , будем брать в качестве пути ломаную, состоящую из отрезков прямых, параллельных координатным осям и не пересекающих границу области D . Тогда, в силу того что $dy = 0$, если $y = y_0$, и $dx = 0$, если $x = x_1$, получим формулу

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy. \quad (A)$$

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

$$146. I = \int_{(0,1)}^{(3,-4)} x dx + y dy.$$

◀ Поскольку $x dx + y dy = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2)$, то

$$I = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \Big|_{(0,1)}^{(3,-4)} = 12. \quad \blacktriangleright$$

$$147. I = \int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy).$$

◀ Из равенства $(x-y)(dx-dy) = (x-y)d(x-y) = \frac{1}{2} d(x-y)^2$ получаем

$$I = \frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{(1,-1)}^{(1,1)} = -2. \quad \blacktriangleright$$

$$148. \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y dx - x dy}{x^2} \text{ вдоль путей, не пересекающих оси } Oy.$$

◀ Здесь $P(x, y) = \frac{y}{x^2}$, $Q(x, y) = -\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, поэтому $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$. Следовательно, в любой односвязной области, не содержащей точек оси Oy , подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции. Применив формулу (А), получим

$$I = \int_2^1 \frac{dx}{x^2} - \int_1^2 dy = -\frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

149. $I = \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ вдоль путей, не проходящих через начало координат.

◀ Поскольку $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2})$, то

$$I = \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = 9. \blacktriangleright$$

150. $I = \int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x dy - y dx}{(x-y)^2}$ вдоль путей, не пересекающих биссектрису первого координатного угла.

◀ Здесь $P(x, y) = -\frac{y}{(x-y)^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}$, и мы убеждаемся в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции во всякой односвязной области, содержащей точки $(0, -1)$, $(1, 0)$ и не содержащей точек прямой $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$. Применив формулу (А), получим

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_{-1}^0 \frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{1}{x+1} \Big|_1^0 + \frac{1}{1-y} \Big|_{-1}^0 = 1. \blacktriangleright$$

151. $I = \int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$ вдоль путей, не пересекающих

оси Oy .

◀ В силу равенства

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x},$$

можем применить формулу (А), в которой интеграл по переменной y равен нулю (так как путь интегрирования параллелен оси Ox):

$$I = \int_1^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{x^2} \cos \frac{\pi}{x}\right) dx = \left(x + \pi \sin \frac{\pi}{x}\right) \Big|_1^2 = 1 + \pi. \blacktriangleright$$

В примерах 152—156 будем находить первообразную функцию по известному ее дифференциалу du , пользуясь при этом формулами (6) и (7), п.4.4. или видоизменив их. Например, иногда вместо формулы (6) бывает полезна формула

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + C. \quad (\text{В})$$

если путь из точки (x_0, y_0) в точку (x, y) выбран в виде ломаной, состоящей из отрезка, параллельного оси Oy и отрезка, параллельного оси Ox (рис. 17).

Найти первообразную функцию u , если:

152. $du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$.

◀ Применим формулу (6), п.4.4, взяв $x_0 = 0, y_0 = 0$.
Получим

$$u(x, y) = \int_0^x t^2 dt + \int_0^y (x^2 - 2xt - t^2) dt + C = \\ = \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C. \blacktriangleright$$

153. $du = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy}{(x+y)^3}$.

◀ Применим формулу (В) считая, что $x_0 = 0, y_0 \neq 0$ — любое фиксированное. Приняв во внимание равенства

$$P(x, y) = \frac{1}{x+y} + \frac{4y^2}{(x+y)^3}, \quad Q(x, y) = \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3},$$

получим

$$u(x, y) = \int_0^x \left(\frac{1}{t+y} + \frac{4y^2}{(t+y)^3} \right) dt + \int_{y_0}^y \frac{dt}{t} + C = \\ = \ln|x+y| - \ln|y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + 2 \ln|y| - \ln|y_0| + C = \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C_1, \quad C_1 = \text{const.} \blacktriangleright$$

154. $du = e^x (e^y(x-y+2) + y) dx + e^x (e^y(x-y) + 1) dy$.

◀ Применим формулу (6), п.4.4, полагая $x_0 = 0, y_0 = 0$. Получим

$$u(x, y) = \int_0^x e^t(t+2) dt + e^x \int_0^y (e^t(x-t)+1) dt + C = (t+1)e^t \Big|_0^x + e^x (e^t(x-t+1)+t) \Big|_0^y + C = \\ = e^{x+y}(x-y+1) + e^x y + C_1, \quad C_1 = C - 1. \blacktriangleright$$

Найти первообразную функцию w , если:

155. $dw = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$.

◀ Записав dw в виде

$$dw = x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz - 2(yz dx + xz dy + xy dz) = d \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz \right),$$

имеем

$$w(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C, \quad C = \text{const.} \blacktriangleright$$

156. $dw = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz$.

◀ Выражение w является полным дифференциалом в любой области, не содержащей начала координат и точек плоскостей xOy, xOz . Применив формулу (7), п.4.4, получим

$$w(x, y, z) = \int_{x_0}^x \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) dt + \int_{y_0}^y \left(\frac{x}{z_0} + \frac{x}{t^2}\right) dt - \int_{z_0}^z \frac{xy}{t^2} dt + C,$$

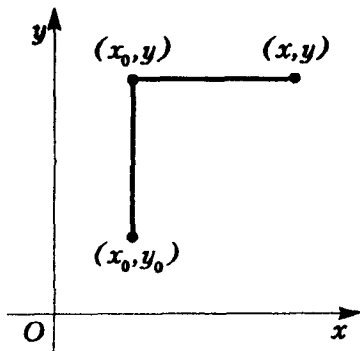


Рис. 17

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка, $C = \text{const}$. Интегрируя, находим

$$w(x, y, z) = x \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0} \right) - x_0 \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0} \right) + \frac{xy}{z_0} - \frac{x}{y} - \frac{xy_0}{z_0} + \frac{x}{y_0} + \frac{xy}{z} - \frac{xy}{z_0} + C.$$

Взяв, например, $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, получим

$$w(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C_1, \quad C_1 = \text{const}. \blacktriangleright$$

157. Найти работу, производимую силой тяжести, когда материальная точка массы m перемещается из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) . Ось Oz направлена вертикально вверх.

◀ Сила тяжести есть вектор-функция

$$F = (P, Q, R) = (0, 0, -mg),$$

где g — ускорение свободного падения, а выражение $P dx + Q dy + R dz = -mg dz$ является полным дифференциалом функции $u = -mgz$. Поэтому работа силы F по перемещению материальной точки из положения (x_1, y_1, z_1) в положение (x_2, y_2, z_2) не зависит от формы траектории и равна величине

$$A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1) = -mg(z_2 - z_1). \blacktriangleright$$

158. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат, величина которой пропорциональна удалению материальной точки от начала координат, если эта точка описывает в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, положительную четверть эллипса $\gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$.

◀ Пусть $M = (x, y)$ — произвольная точка на кривой γ_1 , положительной четверти эллипса γ , а $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от этой точки до начала координат. Тогда упругая сила F , направленная из точки M в начало координат, имеет вид $F(x, y) = \mu r e(M, O)$, где μ — некоторая постоянная, $e(M, O)$ — орт, направленный из точки M в начало координат. Поскольку $e(M, O) = -\frac{r}{r}$, где $r = (x, y)$ — радиус-вектор точки M , то $F(x, y) = -\mu r = (-\mu x, -\mu y)$.

Значение работы A найдем, вычислив интеграл

$$A = -\mu \int_{\gamma_1} x dx + y dy = -\frac{\mu}{2} \int_{\gamma_1} d(x^2 + y^2).$$

Как и в предыдущей задаче, работа A не зависит от формы траектории точки и равна разности значений потенциала $u(x, y) = -\frac{\mu}{2}(x^2 + y^2)$ силовой функции F в точках $(0, b)$ и $(a, 0)$:

$$A = -\frac{\mu}{2}(b^2 - a^2). \blacktriangleright$$

159. Найти работу силы тяготения $|F| = \frac{k}{r^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, действующей на единичную массу, когда последняя перемещается из точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ в точку $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

◀ Сила тяготения F является центральной силой, поскольку ее линия действия проходит через начало координат. Поэтому можем ее представить в виде

$$F = \frac{k}{r^2} e(M, O) = -\frac{k}{r^2} \frac{r(O, M)}{r} = -k \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right),$$

где $M = (x, y, z)$ — произвольная точка, $r(O, M) = (x, y, z)$ — радиус-вектор этой точки. Значение работы A получим с помощью интеграла, взятого вдоль любой гладкой кривой, соединяющей точки M_1 и M_2 :

$$A = -k \int_{M_1}^{M_2} \frac{x}{r^3} dx + \frac{y}{r^3} dy + \frac{z}{r^3} dz = k \int_{M_1}^{M_2} d\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{k}{r} \Big|_{M_1}^{M_2} = k \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

где $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$, $i = 1, 2$. ►

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого рода:

160. $I = \iint_S (x + y + z) dS$, где $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$.

◄ Интегрирование производится по верхней полусфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Так как в точках множества S выполняются равенства

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad z'_x = -\frac{x}{z}, \quad z'_y = -\frac{y}{z}, \quad z > 0,$$

то

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Применив формулу (10), п. 4.3, получим

$$I = a \iint_D \left(\frac{x + y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}.$$

После перехода в интеграле к полярным координатам имеем

$$I = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a-0} \left(\frac{\rho(\sin \varphi + \cos \varphi)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + 1 \right) \rho d\rho = \pi a^3,$$

так как

$$\int_0^{2\pi} (\sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi \int_0^{a-0} \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 0. \quad \blacktriangleright$$

161. $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, где S — граница тела $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

◄ Интегрирование производится по боковой поверхности и основанию конуса T , в силу чего можем записать

$$I = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS,$$

где S_1 — боковая поверхность конуса, S_2 — его основание. На множестве S_2 имеем $dS = dx dy$, поэтому

$$\iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

На боковой поверхности конуса $dS = \sqrt{2} dx dy$, следовательно,

$$\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS = \sqrt{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно получаем $I = \frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2})$. ►

162. $I = \iint_S \frac{dS}{h}$, где S — поверхность эллипсоида с полуосями a, b, c , а h — расстояние

от центра эллипсоида до плоскости, касательной к элементу $d\sigma$ поверхности эллипсоида.

◀ Расстояние h определяется формулой

$$h = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней единичной нормали n к поверхности эллипсоида в точке (x, y, z) . Запишем параметрические уравнения поверхности эллипсоида в виде

$$x = a \sin \theta \cos \varphi, \quad y = b \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Применим формулу (9), п.4.3, полагая там $u = \theta, v = \varphi$. Исходя из симметрии, можем написать равенство

$$I = 8 \iint_{S_1} \frac{dS}{h},$$

где S_1 — восьмая часть поверхности эллипсоида, лежащая в первом октанте. Если $(x, y, z) \in S_1$, то $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Вычислим направляющие косинусы вектора внешней единичной нормали n в точке $(x, y, z) \in S_1 \setminus \partial S_1$, где ∂S_1 — край поверхности S_1 . Для этого найдем

$$A = \frac{D(y, z)}{D(\theta, \varphi)}, \quad B = \frac{D(z, x)}{D(\theta, \varphi)}, \quad C = \frac{D(x, y)}{D(\theta, \varphi)}.$$

Имеем

$$A = bc \sin^2 \theta \cos \varphi, \quad B = ac \sin^2 \theta \sin \varphi, \quad C = ab \sin \theta \cos \theta.$$

Так как $C > 0$ при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ и указанный вектор единичной нормали n в каждой точке множества $S_1 \setminus \partial S_1$ образует с положительным направлением оси Oz острый угол, то $\cos \gamma > 0$, следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Заменив поверхностный интеграл соответствующим ему двойным, получим, принимая во внимание, что $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\theta d\varphi$,

$$I = 8 \iint_{\Omega} \frac{A^2 + B^2 + C^2}{Ax(\theta, \varphi) + By(\theta, \varphi) + Cz(\theta, \varphi)} d\theta d\varphi,$$

где $\Omega = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$.

Сделав элементарные преобразования, находим

$$Ax(\theta, \varphi) + By(\theta, \varphi) + Cz(\theta, \varphi) = abc \sin \theta,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = b^2 c^2 \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + a^2 c^2 \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + a^2 b^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta =$$

$$= a^2 b^2 c^2 \sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right).$$

Окончательно имеем

$$I = 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right) d\varphi =$$

$$= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin^2 \theta + \frac{\pi}{2c^2} \cos^2 \theta \right) \sin \theta d\theta =$$

$$= 4\pi abc \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) B\left(\frac{1}{2}, 2\right) + \frac{1}{c^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta d(\cos \theta) \right) = \frac{4}{3} \pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \blacktriangleright$$

163. $I = \iint_S z dS$, где S — часть поверхности геликоида, заданного параметрическими уравнениями

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v \quad (0 < u < a, \quad 0 < v < 2\pi).$$

◀ Применим формулу (9), п.4.3. Для этого рассмотрим отображение $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ и вычислим коэффициенты Гаусса

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\rangle = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = 1 + u^2,$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\rangle = -u \sin v \cos v + u \sin v \cos v = 0.$$

Таким образом, $EG - F^2 = 1 + u^2$ и по формуле (9), п.4.3, поверхностный интеграл I выражается через повторный:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \sqrt{1+u^2} du \int_0^{2\pi} v dv = 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1+u^2} du = \\ &= \pi^2 \left(u\sqrt{1+u^2} + \ln \left(u + \sqrt{1+u^2} \right) \right) \Big|_0^a = \pi^2 \left(a\sqrt{1+a^2} + \ln \left(a + \sqrt{1+a^2} \right) \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

164. $I = \iint_S (xy + yz + zx) dS$, где S — часть конической поверхности $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, вырезанная цилиндром $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2ax, z \in \mathbb{R}\}$.

◀ Поверхность S проектируется на круг $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}$, а $dS = \sqrt{2} dx dy$, поэтому, применив формулу (9), п.4.3, получим

$$I = \sqrt{2} \iint_D (xy + (x+y)\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy.$$

Перейдем в интеграле к полярным координатам ρ, φ . Тогда

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi \right\}$$

и после замены переменных найдем

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^3 d\rho = 4\sqrt{2}a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((\cos^5 \varphi + \cos^4 \varphi) \sin \varphi + \cos^5 \varphi) d\varphi = \\ &= 8\sqrt{2}a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = 4\sqrt{2}a^4 B\left(3, \frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{2}a^4 \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3+\frac{1}{2})} = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4. \blacktriangleright \end{aligned}$$

165. Доказать формулу Пуассона

$$I = \iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right) du,$$

где S — поверхность сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

◀ Запишем подынтегральную функцию f в виде

$$f(ax + by + cz) = f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$$

и перейдем к новым переменным u, v, w , выбрав плоскость, заданную уравнением $ax + by + cz = 0$, в качестве плоскости переменных u, v , полагая $w = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. При таком выборе новой прямоугольной системы координат единичная сфера S перейдет в единичную сферу S' и при этом $dS' = dS$. Поэтому можем написать равенство

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = \iint_{S'} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} w\right) dS'.$$

Из уравнения $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ находим $u^2 + v^2 = 1 - w^2$. Полагая $\frac{u}{\sqrt{1 - w^2}} = \cos \varphi$, $\frac{v}{\sqrt{1 - w^2}} = \sin \varphi$, получим параметрические уравнения сферы S' в виде

$$u = \sqrt{1 - w^2} \cos \varphi, \quad v = \sqrt{1 - w^2} \sin \varphi, \quad w = w \quad (|w| \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Таким образом, $S' = \Phi(D)$, где

$$\Phi(w, \varphi) = \left(\sqrt{1 - w^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - w^2} \sin \varphi, w\right), \quad D =]-1, 1[\times]0, 2\pi[.$$

Вычислим коэффициенты Гаусса

$$E = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial w}, \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right\rangle = \frac{1}{1 - w^2}, \quad G = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = 1 - w^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial w}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = 0$$

и найдем площадь dS' элемента поверхности S' :

$$dS' = \sqrt{EG - F^2} dw d\varphi = dw d\varphi.$$

Заменяя поверхностный интеграл соответствующим двойным, получим

$$I = \iint_{S'} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} w\right) dS' = \int_{-1}^1 dw \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} w\right) d\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} w\right) dw. \blacktriangleright$$

166. Найти массу параболической оболочки

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq 1\right\},$$

плотность которой меняется по закону $p(x, y, z) = z$.

◀ Масса m данной поверхности вычисляется по формуле

$$m = \iint_S z dS.$$

На поверхности S выполняется равенство $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, а сама поверхность проектируется на множество $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Принимая во внимание равенство

$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$, заменим поверхностный интеграл соответствующим ему двойным и перейдем в последнем к полярным координатам. Имеем

$$m = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho.$$

После замены переменной $1 + \rho^2 = t^2$, окончательно получим

$$m = \pi \int_1^{\sqrt{3}} t^2 (t^2 - 1) dt = \pi \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{2}{15} \pi (6\sqrt{3} + 1). \blacktriangleright$$

167. Найти статические моменты однородной треугольной пластинки $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = a \ (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)\}$ относительно координатных плоскостей.

◀ Применим формулы (16), п.4.3. Полагая $p(x, y, z) = 1$, имеем

$$M_{xOy} = \iint_S z dS, \quad M_{yOz} = \iint_S x dS, \quad M_{zOx} = \iint_S y dS.$$

Принимая во внимание равенства $z|_S = a - x - y$, $(x, y) \in D$, $dS = \sqrt{3} dx dy$, где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}$, получим

$$M_{xOy} = \sqrt{3} \iint_D (a - x - y) dx dy = \sqrt{3} \int_0^a dx \int_0^{a-x} (a - x - y) dy = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^a (a - x)^2 dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} (a - x)^3 \Big|_a^0 = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}.$$

Вполне очевидно, что $M_{yOz} = M_{zOx} = M_{xOy} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. ▶

168. Найти момент инерции относительно оси Oz однородной сферической оболочки $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ (z \geq 0)\}$ с поверхностной плотностью вещества p_0 .

◀ Согласно формуле (19), п.4.3, имеем

$$I_z = p_0 \iint_S (x^2 + y^2) dS,$$

где $dS = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $(x, y) \in D$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a^2\}$.

Заменяя поверхностный интеграл двойным, получим

$$I_z = p_0 a \iint_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

В двойном интеграле перейдем к полярным координатам ρ и φ и заменим полученный интеграл повторным. Имеем

$$\begin{aligned} I_z &= p_0 a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi p_0 a \left(\rho^2 \sqrt{a^2 - \rho^2} \Big|_a^0 + 2 \int_0^a \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho \right) = \\ &= \frac{4}{3} \pi p_0 a (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_a^0 = \frac{4}{3} \pi p_0 a^4. \blacktriangleright \end{aligned}$$

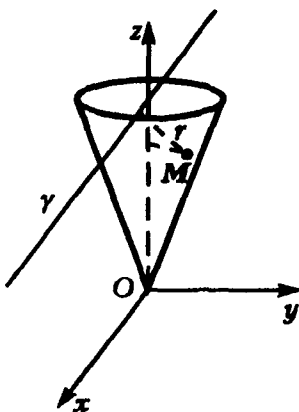


Рис. 18

169. Найти момент инерции однородной конической оболочки

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, \quad 0 \leq z \leq b \right\}$$

с поверхностной плотностью p_0 относительно прямой γ , заданной в пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнениями $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$.

« Прямая γ параллельна оси Ox и лежит в плоскости xOz , отсекая на оси Oz отрезок длины b . Пусть точка $M = (x, y, z)$ принадлежит элементу dS поверхности S , площадь которого равна dS (рис. 18). Квадрат расстояния от точки M до прямой γ определяется по формуле $r^2 = x^2 + y^2 + (b-z)^2$, поэтому искомый момент инерции равен поверхностному интегралу

$$I_\gamma = p_0 \iint_S (x^2 + y^2 + (b-z)^2) dS.$$

Принимая во внимание равенства

$$z|_S = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in D, \quad dS = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy,$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, получим

$$I_\gamma = \frac{p_0 \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint_D \left(x^2 + y^2 + b^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right)^2 \right) dx dy.$$

Переходя к полярным координатам, окончательно найдем

$$\begin{aligned} I_\gamma &= p_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho \left(\rho^2 + b^2 \left(1 - \frac{\rho}{a} \right)^2 \right) d\rho = \\ &= 2\pi p_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^a \left(\rho^3 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) + b^2 \rho - \frac{2b^2 \rho^2}{a} \right) d\rho = \\ &= 2\pi p_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \left(\frac{a^4}{4} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{a^2 b^2}{2} - \frac{2}{3} a^2 b^2 \right) = \frac{\pi}{6} p_0 a \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + b^2). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

170. Найти координаты центра тяжести части однородной поверхности

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\},$$

вырезанной цилиндром $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = ax, z \in \mathbb{R}\}$.

« Для вычисления координат центра тяжести указанной части поверхности S воспользуемся формулами (17), п.4.3, полагая в них $p(x, y, z) = 1$, так как поверхность однородна. Имеем

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy = \sqrt{2} dx dy,$$

$$(x, y) \in D, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq ax\},$$

$$m = \iint_S dS = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \frac{\pi \sqrt{2}}{4} a^2,$$

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{1}{m} \iint_S x \, dS = \frac{\sqrt{2}}{m} \iint_D x \, dx \, dy = \frac{\sqrt{2}}{m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2 + \frac{1}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{\pi a^3}{m} = \frac{a}{2}, \\
 y_C &= \frac{1}{m} \iint_S y \, dS = \frac{\sqrt{2}}{m} \iint_D y \, dx \, dy = \frac{\sqrt{2}}{m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho = \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = 0, \\
 z_C &= \frac{1}{m} \iint_S z \, dS = \frac{\sqrt{2}}{m} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \frac{\sqrt{2}}{m} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 B\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3m} a^3 \frac{\Gamma(2) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2 + \frac{1}{2})} = \frac{16a}{9\pi}. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

171. Найти координаты центра тяжести однородной поверхности

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \, x + y \leq a \, (x \geq 0, y \geq 0) \right\}.$$

◀ Рассматриваемая часть сферы проектируется на множество $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x\}$, поэтому

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = a \iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a \int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \\
 &= a \int_0^a \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_{y=0}^{y=a-x} \right) dx = a \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \, dx.
 \end{aligned}$$

Полагая в интеграле $\arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = t$, найдем

$$\begin{aligned}
 m &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \frac{2 \sin t \cos t}{(1 + \sin^2 t)^2} \, dt = 2a^2 \left(\frac{t}{1 + \sin^2 t} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + \sin^2 t} \right) = \\
 &= 2a^2 \left(-\frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{d(\operatorname{ctg} t)}{2 + \operatorname{ctg}^2 t} \right) = 2a^2 \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{2}} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 \right) = \frac{\pi}{2} a^2 (\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

Применив формулы (17), п.4.3, вычислим сначала координату x_C . Имеем

$$x_C = \frac{a}{m} \int_0^a dy \int_0^{a-y} \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \frac{a}{m} \left(\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy - \sqrt{2} \int_0^a \sqrt{y} \sqrt{a-y} dy \right).$$

Полагая в первом интеграле $y = a \sin \varphi$, а во втором $y = a \sin^2 \theta$, получим

$$x_C = \frac{a^3}{m} \left(\int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta \right) = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}m} (\sqrt{2} - 1) = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

Далее,

$$y_C = \frac{a}{m} \int_0^a dx \int_0^{a-x} \frac{y dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = x_C = \frac{a}{2\sqrt{2}}, \quad z_C = \frac{a}{m} \iint_D dx dy = \frac{a^3}{2m} = \frac{a(1+\sqrt{2})}{\pi}. \blacktriangleright$$

172. Найти полярные моменты инерции

$$I_0 = \iiint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

следующих поверхностей S : а) поверхности куба $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} = a\}$;
б) полной поверхности цилиндра $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R, 0 \leq z \leq H\}$.

◀ а) Можем представить I_0 в виде

$$I_0 = \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} (x^2 + y^2 + z^2) dS,$$

где S_i , $i = \overline{1, 6}$, — грани куба. Рассмотрим грань $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a, z = a\}$. На ней $dS = dx dy$, в силу чего получим

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2) dS &= \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a (x^2 + y^2 + a^2) dy = \\ &= 4 \int_0^a dx \int_0^a (x^2 + y^2 + a^2) dy = 4 \int_0^a \left(ax^2 + \frac{4}{3} a^3 \right) dx = \frac{20}{3} a^4. \end{aligned}$$

Интегралы, входящие в сумму, определяющую I_0 , равны между собой, поэтому имеем

$$I_0 = 6 \cdot \frac{20}{3} a^4 = 40 a^4.$$

б) Представим I_0 в виде

$$I_0 = \iint_{S_n} (x^2 + y^2 + z^2) dS + \iint_{S_v} (x^2 + y^2 + z^2) dS + \iint_{S_b} (x^2 + y^2 + z^2) dS,$$

где S_n — нижнее основание цилиндра S , S_v — его верхнее основание, S_b — его боковая поверхность.

На S_4 и S_5 выполняется равенство $dS = dx dy$, в силу чего первые два интеграла в правой части равенства являются двойными интегралами в замкнутой области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Принимая во внимание равенства $z|_{S_4} = 0$, $z|_{S_5} = H$, получим

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} (x^2 + y^2 + z^2) dS + \iint_{S_5} (x^2 + y^2 + z^2) dS &= \\ &= \iint_D (2(x^2 + y^2) + H^2) dx dy = \pi R^2 H^2 + 2 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам, находим

$$2 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \pi R^4.$$

На S_6 выполняются равенства $x^2 + y^2 = R^2$, $dS = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, причем S_6 проектируется на прямоугольник $D_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R, 0 \leq z \leq H\}$, в силу чего имеем

$$\begin{aligned} \iint_{S_6} (x^2 + y^2 + z^2) dS &= 2R \int_{-R}^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_0^H (R^2 + z^2) dz = 4RH \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right) \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \\ &= 4RH \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right) \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = 2\pi RH \left(R^2 + \frac{H^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Складывая полученные равенства, окончательно находим

$$I_0 = \pi R \left(R(R + H)^2 + \frac{2}{3} H^3 \right). \blacktriangleright$$

173. С какой силой притягивает однородная усеченная коническая поверхность

$$S = \{(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = \rho; 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq b \leq \rho \leq a\}$$

с поверхностной плотностью ρ_0 материальную точку массы m , помещенную в вершине этой поверхности?

◀ Применяя формулу (18), п.4.3, получим

$$\mathbf{F} = \kappa m \rho_0 \iint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS,$$

где κ — постоянная тяготения,

$$\mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Здесь следует взять $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, так как материальная точка находится в вершине конуса. Обозначая $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, имеем

$$F_x = \kappa m \rho_0 \iint_S \frac{x}{r^3} dS, \quad F_y = \kappa m \rho_0 \iint_S \frac{y}{r^3} dS, \quad F_z = \kappa m \rho_0 \iint_S \frac{z}{r^3} dS.$$

Параметризуем поверхность S , полагая $S = \Phi(D)$, где $\Phi(r, \varphi) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \cos \varphi, \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \varphi, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$, $D = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : b\sqrt{2} \leq r \leq a\sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$. Тогда

$$\mathbf{E} = 1, \quad \mathbf{G} = \frac{\mathbf{r}^2}{2}, \quad \mathbf{F} = 0, \quad dS = \sqrt{EG - F^2} dr d\varphi = \frac{r}{\sqrt{2}} dr d\varphi.$$

Заменяя поверхностные интегралы соответствующими двойными, найдем

$$F_x = \frac{1}{2} \kappa m p_0 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = 0,$$

$$F_y = \frac{1}{2} \kappa m p_0 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = 0,$$

$$F_z = \frac{1}{2} \kappa m p_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{b\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = \pi \kappa m p_0 \ln \frac{a}{b}.$$

Из физических соображений можно было сразу сделать вывод о том, что $F_x = 0$, $F_y = 0$, так как однородная поверхность S имеет ось симметрии Oz , на которой находится центр тяжести поверхности, в силу чего

$$\mathbf{F} = \pi \kappa m p_0 \ln \frac{a}{b} \mathbf{k},$$

где $\mathbf{k}$ — орт оси Oz . ►

174. Найти потенциал однородной сферической поверхности $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ плотности p_0 в точке $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, т.е. вычислить интеграл

$$U = \iint_S \frac{p_0}{r} dS,$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

► Перейдем от системы координат $Oxyz$ к системе $O\xi\eta\zeta$, совершив поворот осей так, чтобы точка M_0 находилась на положительной полуоси $O\xi$. В новой системе координат точка M_0 имеет координаты $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = r_0$, где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. При указанном переходе к новой системе координат сфера S перейдет в сферу $S' = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2\}$. Таким образом, требуется вычислить интеграл

$$U = p_0 \iint_{S'} \frac{dS'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r_0)^2}}.$$

Представим множество S' в виде $S' = \Phi(D)$, где $\Phi(\theta, \varphi) = (a \sin \theta \cos \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta)$, $D = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, и вычислим коэффициенты Гаусса, а также dS' . Имеем $E = a^2$, $G = a^2 \sin^2 \theta$, $F = 0$, $dS' = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Принимая во внимание равенство $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r_0)^2 = a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2$, получим

$$\begin{aligned} U &= a^2 p_0 \iint_D \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2}} = a^2 p_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2}} = \\ &= 2\pi a^2 p_0 \left. \frac{\sqrt{a^2 - 2ar_0 \cos \theta + r_0^2}}{ar_0} \right|_0^\pi = \frac{2\pi a p_0}{r_0} (a + r_0 - |a - r_0|). \end{aligned}$$

Если $a < r_0$, то $U = \frac{4\pi a^2 p_0}{r_0}$. Если $a > r_0$, то $U = 4\pi a r_0$. Оба случая объединяются одной формулой. Действительно, неравенство $a < r_0$ эквивалентно неравенству $\frac{a^2}{r_0} < a$, а неравенство $a > r_0$ — неравенству $\frac{a^2}{r_0} > a$. Следовательно, $U = 4\pi p_0 \min \left\{ a, \frac{a^2}{r_0} \right\}$. ►

175. Вычислить интеграл

$$F(t) = \iint_{S(t)} f(x, y, z) dS,$$

где

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{если } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0, & \text{если } z < \sqrt{x^2 + y^2}, \end{cases} \quad S(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = t^2\}.$$

◀ Из условия примера следует, что функция f отлична от нуля на той части поверхности $S(t)$, которая находится внутри части пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченной конической поверхностью $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, поэтому имеем

$$F(t) = \iint_{\substack{x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}}} (x^2 + y^2) dS = |t| \iint_{x^2 + y^2 \leq \frac{t^2}{2}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

После перехода в двойном интеграле к полярным координатам получим

$$F(t) = 4|t| \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = \pi|t| \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{\rho^2 d(\rho^2)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = \frac{2}{3} \pi |t| (2t^2 + \rho^2) \sqrt{t^2 - \rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\frac{|t|}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{6} (8 - 5\sqrt{2}) t^4. \blacktriangleright$$

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго рода:

176. $I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, где S — внешняя сторона сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

◀ Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \iint_S z dx dy.$$

Плоскость $z = 0$ пересекается со сферой S по окружности $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$, являющейся гладким краем компактов $S^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^+ = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$, $S^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^- = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Ориентация кривой γ должна быть согласована с ориентацией многообразий $S^+ \setminus \gamma$ и $S^- \setminus \gamma$ по правилу, указанному в п.4.1. Эти ориентации противоположны, поэтому

$$I_1 = \iint_{S^+} z dx dy + \iint_{S^-} z dx dy = \iint_D z^+ dx dy - \iint_D z^- dx dy = 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

После перехода в интеграле к полярным координатам получим

$$I_1 = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho = \frac{4}{3} \pi (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

Из очевидных равенств

$$\iint_S x dy dz = \iint_S y dz dx = I_1$$

окончательно находим $I = 4\pi a^3$. $\blacktriangleright$

$$177. I = \iint_S (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy, \text{ где } S — \text{внешняя сторона}$$

конической поверхности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$.

◀ Коническая поверхность S проектируется на круг $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq h^2\}$. Из-за особой точки в начале координат множество S называют *псевдомногообразием*. В начале координат вектор нормали $\mathbf{n}$ к S не определен, поэтому

$$I = \iint_{S \setminus \{(0, 0, 0)\}} ((y-z) \cos \alpha + (z-x) \cos \beta + (x-y) \cos \gamma) dS,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора единичной нормали $\mathbf{n}$ в точках множества $S \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Множеством $\{(0, 0, 0)\}$ можно пренебречь при интегрировании в любом случае, поскольку оно имеет меру нуль.

Множество $S \setminus \{(0, 0, 0)\}$ трансверсально ориентируем выбором одного из двух возможных направлений вектора единичной нормали $\mathbf{n}$. Поскольку речь идет о внешней стороне поверхности S , то вектор $\mathbf{n}$ образует с ортом Oz тупой угол, в силу чего имеем

$$\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{z_x'}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos \beta = \frac{z_y'}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}},$$

где $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Заменяя поверхностный интеграл двойным и принимая во внимание, что

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy,$$

получим

$$\begin{aligned} I &= \iint_D ((y - z(x, y))z_x' + (z(x, y) - x)z_y' + y - x) dx dy = \\ &= 2 \iint_D (y - x) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} (\sin \varphi - \cos \varphi) d\varphi \int_0^h \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} h^3 \int_0^{2\pi} (\sin \varphi - \cos \varphi) d\varphi = 0. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$178. I = \iint_S \left(\frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z} \right), \text{ где } S — \text{внешняя сторона эллипсоида, заданного}$$

уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

◀ Множество S представим в виде

$$S = \Phi(D), \quad \Phi(\theta, \varphi) = (a \sin \theta \cos \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, c \cos \theta),$$

где $D = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Согласно определению поверхностного интеграла по ориентированной поверхности S , имеем

$$I = \iint_S \left(\frac{\cos \alpha}{x} + \frac{\cos \beta}{y} + \frac{\cos \gamma}{z} \right) dS,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ A &= \frac{\mathcal{D}(y, z)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)}, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z, x)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)}, \quad C = \frac{\mathcal{D}(x, y)}{\mathcal{D}(\theta, \varphi)}, \end{aligned}$$

x, y, z — компоненты вектора Φ (в примере 162 найдены следующие значения: $A = bc \sin^2 \theta \cos \varphi$, $B = ac \sin^2 \theta \sin \varphi$, $C = ab \sin \theta \cos \theta$). Поскольку $C > 0$ при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ и $C < 0$ при $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, то в формулах для вычисления $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ перед радикалом выбираем знак "+", в силу того что на верхней половине поверхности эллипсоида $\cos \gamma > 0$, а на нижней его половине $\cos \gamma < 0$. Принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} d\theta d\varphi$, приводим поверхностный интеграл к двойному:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{A}{x(\theta, \varphi)} + \frac{B}{y(\theta, \varphi)} + \frac{C}{z(\theta, \varphi)} \right) d\theta d\varphi = \iint_D \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) = 4\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Упражнения для самостоятельной работы

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

119. $\int_\gamma \frac{dt}{x-y}$, где γ — отрезок прямой, заданный уравнением $y = \frac{x}{2} - 2$, заключенный между точками $A = (0, -2)$ и $B = (4, 0)$.

120. $\int_\gamma y dl$, где γ — дуга параболы, заданной уравнением $y^2 = 2px$, отсеченная кривой, уравнение которой $x^2 = 2py$.

121. $\int_\gamma xyz dl$, где γ — четверть окружности, лежащей в первом октанте, полученной в результате пересечения сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ и поверхности цилиндра $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}, z \in \mathbb{R}\}$.

122. $\int_\gamma (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$, где γ — первый виток конической винтовой линии, заданной уравнениями $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$.

123. Найти массу дуги кривой, заданной уравнением $y = \ln x$, между точками с абсциссами x_1 и x_2 , если плотность кривой в каждой точке равна квадрату абсциссы точки.

124. Найти массу кривой γ , заданной уравнениями $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, от точки, соответствующей $t = 0$, до произвольной точки, если плотность кривой обратно пропорциональна квадрату полярного радиуса и в точке $(1, 0, 1)$ равна единице.

125. Вычислить статический момент первого витка конической винтовой линии, заданной уравнениями $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, относительно плоскости xOy , считая плотность пропорциональной квадрату расстояния от этой плоскости: $\mu = kz^2$, $k = \text{const}$.

126. Вычислить площадь данной цилиндрической поверхности, заключенной между плоскостью xOy и поверхностями, заданными уравнениями $y = \sqrt{2px}$, $z = y$, $x = \frac{8}{9}p$, $p > 0$.

Вычислить криволинейные интегралы:

127. $\int_\gamma x dy$, где γ — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника, образованного отрезками осей координат и прямой, заданной уравнением $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

128. $\int_\gamma \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$, где γ — четвертая часть астроиды, заданной уравнениями $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ (от точки $(a, 0)$ до точки $(0, a)$).

129. $\int_\gamma x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, где γ — отрезок прямой линии, от точки $(1, 1, 1)$ до точки $(2, 3, 4)$.

130. Доказать, что величина интеграла

$$\int_{\gamma} (2xy - y) dx + x^2 dy.$$

где γ — замкнутый контур, выражает площадь области, ограниченной этим контуром.

131. Доказать, что интеграл

$$\int_{\gamma} \varphi(y) dx + (x\varphi'(y) + x^3) dy$$

равен утроенному моменту инерции однородной плоской фигуры, ограниченной контуром γ , относительно оси ординат.

Найти функции по данным полным дифференциалам:

$$132. du = \left(\frac{x-2y}{(y-x)^2} + x \right) dx + \left(\frac{y}{(y-x)^2} - y^2 \right) dy. \quad 133. du = \frac{2(xx dy + xy dz - yz dx)}{(x-yz)^2}.$$

Вычислить поверхностные интегралы:

134. $\iint_S \frac{dS}{r^2}$, где S — цилиндр, заданный уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченный плоскостями, уравнения которых $z = 0$ и $z = H$, а r — расстояние от точки поверхности до начала координат.

135. $\iint_S \frac{dS}{\rho^n}$, где S — сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ а ρ — расстояние элемента поверхности до точки $(0, 0, c)$, расположенной вне сферы.

136. $\iint_S yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра, заданного уравнением $x^2 + y^2 = R^2$, и плоскостей, уравнения которых $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $z = H$.

137. $\iint_S y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz$, где S — внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения, заданного уравнением $z = x^2 + y^2$, цилиндра, заданного уравнением $x^2 + y^2 = 1$, и координатных плоскостей.

138. $\iint_S ((z^n - y^n) \cos \alpha + (x^n - z^n) \cos \beta + (y^n - x^n) \cos \gamma) dS$, где S — верхняя половина сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, а $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней единичной нормали n к поверхности S .

§ 5. Формулы Остроградского, Грина и Стокса

Пусть K — компакт с краем ∂K в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ с фиксированным базисом.

Определение 1. Компакт K называется элементарным, если каждая прямая в пространстве $\mathbb{R}^m$, параллельная оси Ox_i , $i = \overline{1, m}$, либо не пересекается с K , либо имеет с K один общий сегмент, который может вырождаться в точку.

Указанный в определении сегмент можно задать в виде

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) \leq x_i \leq \psi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m), \quad (1)$$

где φ_i, ψ_i — непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Определение 2. Компакт $K \subset \mathbb{R}^m$ с краем ∂K называется простым, если существует его представление в виде

$$K = \bigcup_{j=1}^n K_j, \quad (2)$$

где K_j — элементарные компакты без общих внутренних точек с краями ∂K_j , $j = \overline{1, n}$.

Теорема Остроградского. Пусть на простом компакте $K \subset \mathbb{R}^3$ с ориентированным краем $\partial K = S$ определена вектор-функция $F = (P, Q, R)$, непрерывная на K вместе с частными производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$. Тогда справедлива формула Остроградского

$$\iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \quad (3)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора единичной нормали n в точках поверхности S .

Если в равенстве (3) взять $P = x, Q = y, R = z$, то получим следующую формулу для вычисления объема V компакта K посредством поверхностного интеграла второго рода:

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS. \quad (4)$$

Если D — простой компакт с ориентированным краем $\partial D = \gamma$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$, а вектор-функция $F = (P', Q')$ непрерывна на D вместе с частными производными $\frac{\partial P'}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q'}{\partial y}$, то формула Остроградского принимает вид

$$\iint_D \left(\frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} \langle F, n \rangle dl. \quad (5)$$

Если $\tau = (\cos \alpha', \cos \beta')$ — единичный касательный вектор к гладкой кривой γ , указывающий положительное направление ее обхода, то, принимая во внимание, что $n = [\tau, k]$, где k — орт оси Oz пространства $\mathbb{R}^3$, и пользуясь правилом циклической перестановки в смешанном произведении, имеем

$$\begin{aligned} \langle F, n \rangle dl &= (\langle P' i, [\tau, k] \rangle + \langle Q' j, [\tau, k] \rangle) dl = (P' \langle \tau, [k, i] \rangle + Q' \langle \tau, [k, j] \rangle) dl = \\ &= (P' \langle \tau, j \rangle - Q' \langle \tau, i \rangle) dl = \langle -Q' i + P' j, \tau \rangle dl. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно определению криволинейного интеграла второго рода, равенство (5) принимает вид

$$\iint_D \left(\frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} -Q' dx + P' dy. \quad (6)$$

Полагая $P' = x, Q' = y$, получим формулу для вычисления площади плоской фигуры, ограниченной гладким контуром γ , посредством криволинейного интеграла второго рода:

$$P = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx. \quad (7)$$

Из теоремы Остроградского и формулы (6) получаем, как следствие, теорему и формулу Грина.

Теорема Грина. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — простой компакт с ориентированным краем γ , на котором определена вектор-функция $F = (P, Q)$, непрерывная на D вместе с частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда справедлива формула Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} P dx + Q dy. \quad (8)$$

Для доказательства формулы (8) следует взять в формуле (6) $P' = Q, Q' = -P$.

Определение 3. Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ с краем γ' называется элементарной, если ее можно задать уравнением $z = z(x, y), (x, y) \in D$, а также уравнением

$x = x(y, z)$, $(y, z) \in D'$, где D и D' — компакты в пространстве $\mathbb{R}^2$ с краями λ и λ' , а функции z и x непрерывно дифференцируемы в D и D' .

Определение 4. Гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ с краем γ' называется простой, если существует ее представление в виде $S = \bigcup_{j=1}^n S_j$, где S_j — элементарные поверхности без общих внутренних точек с краями γ_j .

Если простая поверхность S трансверсально ориентирована и ориентации контуров γ' и γ_j , $j = \overline{1, n}$, согласованы с ориентацией поверхности, то общие части границ двух смежных поверхностей S_j и S_{j+1} будут противоположно ориентированными.

Теорема Стокса. Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — гладкая простая поверхность с ориентированным краем γ' , $F = (P, Q, R)$ — непрерывная на S вектор-функция, компоненты которой имеют непрерывные на S частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$. Тогда справедлива формула Стокса

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_{\gamma'} P dx + Q dy + R dz, \quad (9)$$

где под умножением символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ на функцию будем понимать выполнение соответствующей операции дифференцирования, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора единичной нормали n .

179. Применяя формулу Грина (8), вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_{\gamma} e^x ((1 - \cos y) dx - (y - \sin y) dy),$$

где γ — пробегаяемый в положительном направлении контур, ограничивающий область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < y < \sin x\}$.

◀ По формуле Грина (8) имеем

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^x (\sin y - y)) - \frac{\partial}{\partial y} (e^x (1 - \cos y)) \right) dx dy = - \iint_D y e^x dx dy = - \int_0^{\pi} e^x dx \int_0^{\sin x} y dy = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx = - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} e^x (1 - \cos 2x) dx = - \frac{1}{4} e^x \left(1 - \frac{1}{5} (\cos 2x + 2 \sin 2x) \right) \Big|_0^{\pi} = - \frac{1}{5} (e^{\pi} - 1). \blacktriangleright \end{aligned}$$

180. На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy, \quad I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy,$$

где AmB — отрезок прямой, соединяющий точки $A = (1, 1)$ и $B = (2, 6)$, и AnB — дуга параболы с вертикальной осью, проходящая через те же точки A , B и начало координат?

◀ Уравнение параболы, проходящей через начало координат и точки A , B , имеет вид $y = 2x^2 - x$, а разность $I_2 - I_1$ является криволинейным интегралом по замкнутому контуру $AnBmA$, ограничивающему область $D \subset \mathbb{R}^2$ и пробегаяемому в положительном направлении, в силу чего можем применить формулу (8):

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \oint_{AnBmA} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (-(x-y)^2) - \frac{\partial}{\partial y} (x+y)^2 \right) dx dy = \\ &= -4 \iint_D x dx dy = -4 \int_1^2 x dx \int_{2x^2-x}^{5x-4} dy = -4 \int_1^2 (6x^2 - 4x - 2x^3) dx = (2x^4 + 8x^2 - 8x^3) \Big|_1^2 = -2. \end{aligned}$$

Следовательно, $I_1 - I_2 = 2$. ►

181. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

где AmO — верхняя полуокружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = ax$, пробегаемая от точки $A = (a, 0)$ до точки $O = (0, 0)$.

◀ На сегменте $[0, a]$ подынтегральное выражение равно нулю, поэтому интеграл по кривой AmO равен интегралу по замкнутому контуру $AmOA$, состоящему из кривой AmO и сегмента $[0, a]$, ограничивающему область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{ax - x^2}\}$, в силу чего можем применить формулу (8):

$$\begin{aligned} I &= \int_{AmOA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (e^x \cos y - m) - \frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin y - my) \right) dx dy = \\ &= m \iint_D dx dy = \frac{m}{8} \pi a^2. \text{ ►} \end{aligned}$$

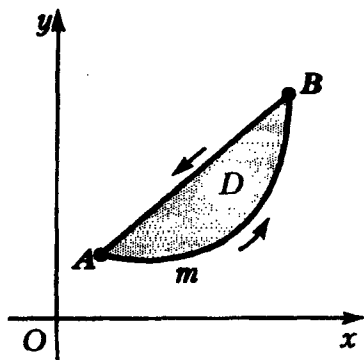


Рис. 19

182. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{AmB} (\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - m) dy,$$

где φ, φ' — непрерывные функции, AmB — произвольный путь, соединяющий точки $A = (x_1, y_1)$ и $B = (x_2, y_2)$, но ограничивающий вместе с отрезком AB фигуру D , площадь которой равна данной величине P .

◀ Интеграл по кривой AmB представим в виде суммы интегралов по замкнутому контуру $AmBA$ и по отрезку AB (рис. 19):

$$I = \oint_{AmBA} (\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - m) dy + \int_{AB} (\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - m) dy = I_1 + I_2.$$

Интеграл I_1 вычислим, применив формулу (8):

$$I_1 = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (\varphi'(y)e^x - m) - \frac{\partial}{\partial y} (\varphi(y)e^x - my) \right) dx dy = m \iint_D dx dy = mP.$$

Для вычисления интеграла I_2 преобразуем подынтегральное выражение к виду

$$\begin{aligned} &(\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - m) dy = \\ &= (\varphi(y)e^x - my) dx + (\varphi'(y)e^x - mx) dy + m(x-1) dy = du + m(x-1) dy, \end{aligned}$$

где du — полный дифференциал некоторой функции. Следовательно,

$$I_2 = \int_{AB} du + m \int_{AB} (x-1) dy,$$

где первый интеграл в правой части этого равенства не зависит от выбора пути интегрирования, соединяющего точки A и B . Таким образом,

$$\int_{AB} du = \int_{x_1}^{x_2} (\varphi(y_1)e^x - my_1) dx + \int_{y_1}^{y_2} (\varphi'(y)e^{x_2} - mx_2) dy = \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - m(x_2y_2 - x_1y_1).$$

На отрезке AB выполняется равенство $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, в силу чего имеем

$$\begin{aligned} m \int_{AB} (x - 1) dy &= m \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} (x - 1) dx = m \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \frac{(x - 1)^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2} = \\ &= \frac{m}{2} (y_2 - y_1)(x_1 + x_2 - 2) = \frac{m}{2} (y_2 - y_1)(x_1 + x_2) - m(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Складывая полученные значения интегралов, окончательно найдем

$$I = mP + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - m(y_2 - y_1). \blacktriangleright$$

183. Определить дважды непрерывно дифференцируемые функции $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$I = \oint_{\gamma} P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy$$

для любого замкнутого контура γ не зависел от постоянных α и β .

◀ Если функции P и Q удовлетворяют поставленному условию, то должно выполняться равенство

$$\oint_{\gamma} P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy = \oint_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

для любого замкнутого контура γ , в силу чего имеем

$$I_1 = \oint_{\gamma} \overline{P} dx + \overline{Q} dy = 0,$$

где $\overline{P} = P(x + \alpha, y + \beta) - P(x, y)$, $\overline{Q} = Q(x + \alpha, y + \beta) - Q(x, y)$.

Для того чтобы криволинейный интеграл I_1 по любому замкнутому контуру γ был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы в односвязной области, ограниченной этим контуром, и на самом контуре выполнялось равенство $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial y}$ (которое следует из формулы Грина). Обозначив $x + \alpha = \xi$, $y + \beta = \eta$, получим написанное условие в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi, \eta) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial \eta}(\xi, \eta) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y),$$

откуда имеем равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi, \eta) - \frac{\partial P}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

Левая часть этого равенства не зависит от ξ и η , поскольку правая его часть зависит только от x и y , следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C, \quad C = \text{const.}$$

Из условия $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C$ получаем равенство $\frac{\partial}{\partial x}(Q(x, y) - Cx) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$, справедливое лишь в том случае, когда $Q(x, y) - Cx = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \psi(y)$, $P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x)$, где u , φ , ψ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Окончательно находим

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x), \quad Q = Cx + \frac{\partial u}{\partial y} + \psi(y), \quad C = \text{const.} \blacktriangleright$$

184. Вычислить интеграл $I = \oint_{\gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, где γ — простой замкнутый контур, не

проходящий через начало координат, пробегаемый в положительном направлении.

◀ Если контур γ не окружает начало координат, то, применив формулу Грина, получим

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx dy = \iint_D \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = 0.$$

Если контур γ окружает начало координат, то применить формулу Грина нельзя, поскольку область D в этом случае не односвязна. В этом случае будем вычислять интеграл I непосредственно.

Обозначим через ω дифференциальное выражение под знаком интеграла I . Покажем, что интеграл

$$I = \oint_{\gamma} \omega$$

не зависит от выбора кривой γ , окружающей начало координат.

Пусть γ_1 и γ_2 — произвольные непересекающиеся замкнутые гладкие или кусочно-гладкие контуры, окружающие начало координат и ограничивающие простую область $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. При положительной ориентации границы $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ области D направления обхода кривых γ_1 и γ_2 будут противоположны (рис. 20). Двухсвязная простая область D не содержит особой точки подынтегрального выражения ω , поэтому, согласно формуле Грина, имеем

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) dx dy = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0,$$

откуда следует равенство

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega,$$

показывающее, что интеграл I не зависит от выбора замкнутой кривой γ , окружающей начало координат. Взяв окружность $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = e \cos \varphi, y = e \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, получим

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{e^2 \cos^2 \varphi + e^2 \sin^2 \varphi}{e^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi. \blacktriangleright$$

185. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой γ , заданной уравнением $\left(\frac{x}{a}\right)^n +$

$\left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$, $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, и отрезками осей координат.

◀ Для решения примера воспользуемся формулой (7).

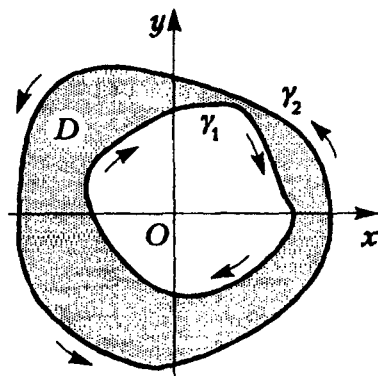


Рис. 20

Полагая $x = a\rho \cos^{\frac{2}{n}} \varphi$, $y = b\rho \sin^{\frac{2}{n}} \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), получим уравнение заданной кривой в полярных координатах, используя которое, находим ее параметрические уравнения

$$x = \frac{a \left(\cos^2 \varphi \sin^{\frac{2}{n}} \varphi + \sin^2 \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \right)}{\sin^{\frac{2}{n}} \varphi}, \quad y = \frac{b \left(\cos^2 \varphi \sin^{\frac{2}{n}} \varphi + \sin^2 \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \right)}{\cos^{\frac{2}{n}} \varphi}.$$

Из равенства $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg}^{\frac{2}{n}} \varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, получаем

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2b}{na} \frac{\sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi}{\cos^{\frac{2}{n}+1} \varphi} d\varphi,$$

$$\frac{1}{2}(x dy - y dx) = \frac{1}{2} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{ab}{n} \left(\sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{3-\frac{2}{n}} \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi + \sin^{3-\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \right) d\varphi,$$

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $x dy - y dx = 0$ на отрезках осей координат, ограничивающих фигуру, то формула (7) принимает вид

$$P = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx.$$

Заменим криволинейный интеграл определенным, приняв во внимание равенство

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{3-\frac{2}{n}} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{3-\frac{2}{n}} \varphi d\varphi.$$

Получим

$$P = \frac{2ab}{n} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{3-\frac{2}{n}} \varphi d\varphi \right) =$$

$$= \frac{ab}{n} \left(\sin^2 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + B\left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right) \right) = \frac{ab}{n} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right). \blacktriangleright$$

186. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой γ , заданной уравнением

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad n > 0.$$

◀ Переходя к обобщенным полярным координатам по формулам $x = a\rho \cos^{\frac{2}{2n+1}} \varphi$, $y = b\rho \sin^{\frac{2}{2n+1}} \varphi$, получим уравнение кривой γ в виде $\rho = c \cos^{\frac{2n}{2n+1}} \varphi \sin^{\frac{2n}{2n+1}} \varphi$, из которого заключаем, что при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ кривая выходит из начала координат и возвращается в него, т.е. является петлей. Используя уравнение кривой γ в полярной системе координат, получим ее параметрические уравнения, в которых параметром служит угол φ :

$$x = ac \cos^{\frac{2n+2}{2n+1}} \varphi \sin^{\frac{2n}{2n+1}} \varphi, \quad y = bc \cos^{\frac{2n}{2n+1}} \varphi \sin^{\frac{2n+2}{2n+1}} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Далее действуем по той же схеме, что и при решении предыдущего примера:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \frac{2}{2n+1} \varphi, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2b}{a(2n+1)} \frac{\sin^{\frac{2}{2n+1}-1} \varphi}{\cos^{\frac{2}{2n+1}-1} \varphi} d\varphi,$$

$$\frac{1}{2}(x dy - y dx) = \frac{1}{2} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{abc^2}{2n+1} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi,$$

$$P = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} x dy - y dx = \frac{abc^2}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{abc^2}{2(2n+1)}. \blacktriangleright$$

187. Показать, что если γ — замкнутый контур и e — произвольное направление, то

$$I = \oint_{\gamma} \cos(\widehat{e}, n) dl = 0,$$

где n — внешняя единичная нормаль к контуру γ .

◀ Пусть $e = (\cos \alpha_0, \cos \beta_0)$ — произвольное направление. Поскольку $\|e\| = 1$ и $\|n\| = 1$, то $\cos(\widehat{e}, n) = \langle e, n \rangle$. Если кривая γ ограничивает область $D \subset \mathbb{R}^2$, то, применив формулу Остроградского (5), в которой $F = e$, получим

$$I = \oint_{\gamma} \langle e, n \rangle dl = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha_0 + \frac{\partial}{\partial y} \cos \beta_0 \right) dx dy = 0. \blacktriangleright$$

188. Найти значение интеграла

$$I = \oint_{\alpha} \left(x \cos(\widehat{n}, i) + y \cos(\widehat{n}, j) \right) dl,$$

где γ — простая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область D , и n — внешняя нормаль к ней (i, j — орты осей координат).

◀ Поскольку $\cos(\widehat{n}, i) = \langle n, i \rangle$, $\cos(\widehat{n}, j) = \langle n, j \rangle$, то интеграл I преобразовывается к виду

$$I = \oint_{\gamma} (x \langle n, i \rangle + y \langle n, j \rangle) dl = \oint_{\gamma} \langle F, n \rangle dl,$$

где $F = xi + yj = (x, y)$. Осталось применить формулу (5):

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y \right) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2P,$$

где P — площадь области D . ▶

189. Найти $\lim_{d(D) \rightarrow 0} \frac{1}{B} \oint_{\gamma} \langle F, n \rangle dl$, где B — площадь области D , ограниченной контуром

γ , окружающим точку (x_0, y_0) , $d(D)$ — диаметр области D , n — единичный вектор внешней нормали к контуру γ и $F = (P, Q)$ — вектор, непрерывно дифференцируемый в $D \cup \gamma$.

◀ Согласно формуле (5), имеем

$$\frac{1}{B} \oint_{\gamma} \langle F, n \rangle dl = \frac{1}{B} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

При стягивании контура γ в точку (x_0, y_0) получим, применив теорему о среднем и пользуясь непрерывной дифференцируемостью функций P и Q :

$$\lim_{d(D) \rightarrow 0} \frac{1}{B} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Следовательно,

$$\lim_{d(D) \rightarrow 0} \frac{1}{B} \oint_{\gamma} \langle F, n \rangle dl = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0). \blacktriangleright$$

190. Доказать, что если S — замкнутая простая поверхность и e — любое постоянное направление, то

$$I = \iint_S \cos(\widehat{n, e}) dS = 0,$$

где n — внешняя единичная нормаль к поверхности S .

◀ Пусть $e = (\cos \alpha_0, \cos \beta_0, \cos \gamma_0)$ — единичный фиксированный вектор. Тогда можно написать равенство

$$\cos(\widehat{n, e}) = \langle n, e \rangle = \cos \alpha \cos \alpha_0 + \cos \beta \cos \beta_0 + \cos \gamma \cos \gamma_0,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали n . Применив формулу Остроградского (3), получим

$$I = \iint_S \langle n, e \rangle dS = \iiint_K \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha_0 + \frac{\partial}{\partial y} \cos \beta_0 + \frac{\partial}{\partial z} \cos \gamma_0 \right) dx dy dz = 0. \blacktriangleright$$

191. Доказать, что объем V конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью S , заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, и плоскостью, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, вычисляется по формуле $V = \frac{PH}{3}$, где P — площадь основания конуса, расположенного в данной плоскости, H — его высота.

◀ Не ограничивая общности, можем считать, что вершина конуса находится в начале координат, а плоскость, в которой расположено основание конуса, пересекает положительную полуось Oz (этого всегда можно добиться путем линейного преобразования координат). Для вычисления объема конуса воспользуемся формулой (4), которую запишем в виде

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \langle r, n \rangle dS = \frac{1}{3} \iint_{S_1} \langle r, n \rangle dS + \frac{1}{3} \iint_{S_2} \langle r, n \rangle dS,$$

где S_1 — основание конуса, S_2 — его боковая поверхность, $r = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M = (x, y, z)$ на поверхности конуса, $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ — единичный вектор нормали к поверхности конуса (рис. 21). На боковой поверхности конуса векторы r и n ортогональны, поэтому

$$\iint_{S_2} \langle r, n \rangle dS = 0.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{3} \iint_{S_1} \langle r, n \rangle dS$.

На множестве S_1 выполняется равенство

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C},$$

откуда получаем

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$V = -\frac{D}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \iint_{S_1} dS = -\frac{DP}{3\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где P — площадь основания конуса S . Из рис. 21 видно, что $H = -\frac{D}{C} \cos \gamma = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где H — высота конуса.

Таким образом, $V = \frac{PH}{3}$. ►

192. Найти объем тела T , ограниченного поверхностями, заданными параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, & y &= a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \\ z &= c \sin u, & z &= \pm c \quad (a > 0, b > 0). \end{aligned}$$

◀ Пусть $c > 0$. В плоскости xOy имеем

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad u = 0, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Если $z = \pm c$, то $u = \pm \frac{\pi}{2}$, $x^2 + y^2 \leq b^2$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Следовательно, верхним и нижним основаниями тела T являются круги радиуса b . Таким образом,

$$T = \Phi(D), \quad \text{где } \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

$$D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi \right\}.$$

Если $a^2 > b^2$, то при $z > 0$ единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ в каждой точке верхней части боковой поверхности образует с ортом $\mathbf{k}$ оси Oz острый угол, если же $a^2 < b^2$ — то тупой угол (рис. 22, 23). ◻

Для вычисления объема V тела T воспользуемся формулой (4), записав ее в виде

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle dS,$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M = (x, y, z)$, S — полная поверхность тела T . Разобьем интеграл на сумму интегралов

$$V = \frac{1}{3} \left(\iint_{S_1} \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle dS + \iint_{S_2} \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle dS + \iint_{S_3} \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle dS \right),$$

где S_1 и S_2 — соответственно верхнее и нижнее основания тела, S_3 — его боковая поверхность. На поверхности S_1 выполняются равенства $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{r} = (x, y, c)$, $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = c$, а на поверхности S_2 имеем $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, $\mathbf{r} = (x, y, -c)$, $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = c$. Принимая во внимание, что на S_1 и на S_2 справедливо равенство $dS = dx dy$, получим

$$\iint_{S_1} \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle dS = \iint_{S_2} \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle dS = c \iint_{x^2 + y^2 \leq b^2} dx dy = \pi b^2 c.$$

Для вычисления интеграла по поверхности S_3 нам понадобятся направляющие косинусы вектора $\mathbf{n}$. Вычислим $C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = (b^2 - a^2) \sin u \cos u$, $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$. Если $a^2 > b^2$, то $C < 0$, и поскольку $\cos \gamma > 0$, то

$$\cos \gamma = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

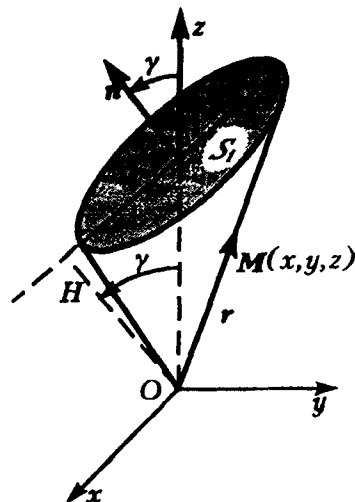


Рис. 21

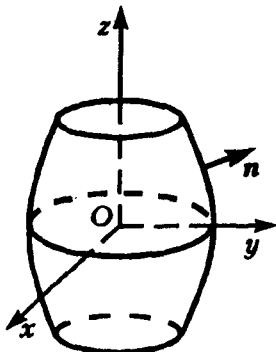


Рис. 22

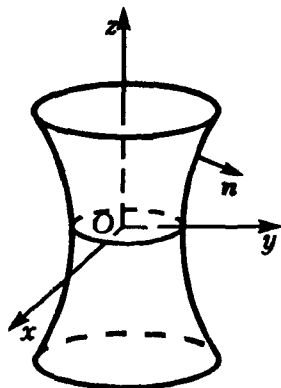


Рис. 23

Если $a^2 < b^2$, то $C > 0$, и поскольку $\cos \gamma < 0$, то

$$\cos \gamma = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Следовательно, принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$, имеем

$$\iint_{S_3} \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle dS = - \iint_D (x(u, v)A + y(u, v)B + z(u, v)C) du dv,$$

где

$$A = \frac{\mathcal{D}(y, z)}{\mathcal{D}(u, v)} = -cx(u, v) \cos u, \quad B = \frac{\mathcal{D}(z, x)}{\mathcal{D}(u, v)} = -cy(u, v) \cos u.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle dS &= \iint_D (c(x^2(u, v) + y^2(u, v)) \cos u + (a^2 - b^2)z(u, v) \sin u \cos u) du dv = \\ &= a^2 c \iint_D \cos u du dv = a^2 c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du \int_0^{2\pi} dv = 4\pi a^2 c. \end{aligned}$$

Складывая полученные значения, при $c > 0$ имеем

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 c + \frac{2}{3}\pi b^2 c = \frac{4}{3}\pi c \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right).$$

Если $c < 0$, то, очевидно, получим

$$V = -\frac{4}{3}\pi c \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right).$$

Окончательно имеем

$$V = \frac{4}{3}\pi |c| \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right). \blacktriangleright$$

Рассмотрим несколько примеров на применение формулы Остроградского (3).
Вычислить интегралы:

$$193. I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy, \text{ где } S — \text{ внешняя сторона сферы, заданной}$$

уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

◀ Используя формулу Остроградского (3), находим

$$I = 3 \iiint_K (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

где $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ — шар радиуса a . После перехода в интеграле к сферическим координатам получим

$$I = 3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^4 d\rho = \frac{12}{5} \pi a^5. \blacktriangleright$$

$$194. I = \iint_S (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dz dx + (z - x + y) dx dy, \text{ где } S — \text{ внешняя}$$

сторона поверхности, заданной уравнением $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

◀ Обозначим через T тело, ограниченное поверхностью S . Применив формулу (3), получим

$$I = \iiint_T \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - y + z) + \frac{\partial}{\partial y}(y - z + x) + \frac{\partial}{\partial z}(z - x + y) \right) dx dy dz = 3 \iiint_T dx dy dz.$$

Произведем в интеграле замену переменных, полагая $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$. Принимая во внимание равенство

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{4},$$

находим

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{4} \iiint_{|u|+|v|+|w| \leq 1} du dv dw = 6 \iiint_{\substack{u+v+w \leq 1 \\ u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0}} du dv dw = 6 \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \int_0^{1-u-v} dw = \\ &= 6 \int_0^1 du \int_0^{1-u} (1-u-v) dv = 6 \int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2} du = (1-u)^3 \Big|_1^0 = 1. \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$195. I = \iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS, \text{ где } S — \text{ часть конической поверхности,}$$

заданной уравнением $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$, и $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали n к этой поверхности.

◀ Поскольку поверхность S незамкнута, то воспользоваться формулой Остроградского (3) нельзя. Рассмотрим замкнутую поверхность S_1 , которую получим, присоединив ко всем точкам поверхности S множество точек круга $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq h^2, z = h\}$. Множество S_1 является псевдомногообразием, поскольку в вершине конуса и на окружности $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = h^2, z = h\}$ вектор n не определен. Этими множествами можно пренебречь, так как они имеют меру 0, и рассматривать интеграл на множестве

$S_3 = S_1 \setminus (\gamma \cup \{0, 0, 0\})$. Имеем равенство

$$I = \iint_{S_3} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS - \iint_{S_2 \setminus \gamma} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS.$$

К интегралу на множестве S_3 можем применить формулу Остроградского (3), а на множестве $S_2 \setminus \gamma$ имеем $\cos \alpha = \cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 1$, $z^2 = h^2$, $dS = dx dy$. Поэтому получим

$$I = 2 \iiint_T (x + y + z) dx dy dz - h^2 \iint_{x^2 + y^2 < h^2} dx dy = 2 \iiint_T (x + y + z) dx dy dz - \pi h^4,$$

где $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < h^2, \sqrt{x^2 + y^2} < z < h\}$.

В тройном интеграле перейдем к цилиндрическим координатам и заменим полученный интеграл повторным. Найдем

$$\begin{aligned} \iiint_T (x + y + z) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho d\rho \int_{\rho}^h (\rho(\sin \varphi + \cos \varphi) + z) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left(\rho(h - \rho)(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{h^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho d\rho = \frac{\pi}{4} h^4. \end{aligned}$$

Окончательно имеем $I = \frac{\pi}{2} h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2} h^4$. ►

196. Вычислить интеграл Гаусса

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{n}})}{r^2} dS,$$

где S — простая замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая компакт $T \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S в ее точке (ξ, η, ζ) , $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий точку (x, y, z) с точкой (ξ, η, ζ) , и $z = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

◀ Рассмотрим два случая: а) поверхность S не окружает точку (x, y, z) ; б) поверхность S окружает точку (x, y, z) .

В случае а) можем применить формулу Остроградского (3). Приняв во внимание равенство $\cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{n}}) = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r}$, получим

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= \iint_S \left(\frac{\xi - x}{r^3} \cos \alpha + \frac{\eta - y}{r^3} \cos \beta + \frac{\zeta - z}{r^3} \cos \gamma \right) dS = \\ &= \iiint_T \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi - x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta - y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta - z}{r^3} \right) \right) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \iiint_T \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2 + 3(\eta - y)^2 + 3(\zeta - z)^2}{r^5} \right) d\xi d\eta d\zeta = \iiint_T \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) d\xi d\eta d\zeta = 0. \end{aligned}$$

В случае б) формулу Остроградского применять нельзя, так как интеграл $I(x, y, z)$ становится несобственным. Поэтому вычислим его непосредственно. Для этого рассмотрим произвольный простой компакт T_1 с краем S_1 , лежащий строго внутри тела T . Предположим, что $(x, y, z) \in \hat{T}_1$, где $\hat{T}_1$ — внутренность компакта T_1 . Множество $T \setminus \hat{T}_1$ не содержит точку (x, y, z) и является компактом с ориентированным краем $S \cup S_1^-$, где S_1^- — ориентированная граница компакта T_1 в каждой точке которой единичный вектор нормали $\mathbf{n}$

направлен внутрь T_1 . Применив формулу Остроградского (3) на компакте $T \setminus \bar{T}_1$, получим равенство

$$\iint_S \left\langle \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \mathbf{n} \right\rangle dS + \iint_{S_1^-} \left\langle \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \mathbf{n} \right\rangle dS = 0,$$

из которого следует, что

$$I(x, y, z) = \iint_{S_1} \left\langle \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \mathbf{n} \right\rangle dS,$$

где S_1 — произвольная гладкая поверхность, все точки которой являются внутренними точками компакта T . Таким образом, интеграл $I(x, y, z)$ не зависит от вида поверхности, окружающей точку (x, y, z) . Поэтому можем взять в качестве поверхности S_1 сферу достаточно малого радиуса $\varepsilon > 0$. При этом получим

$$I(x, y, z) = \iint_{S_1} \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{r^3} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_1} dS = \frac{4\pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = 4\pi,$$

поскольку на сфере S_1 векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$ коллинеарны и выполняется равенство $r = \varepsilon$. ►

197. Тело T целиком погружено в жидкость. Исходя из закона Паскаля, доказать, что выталкивающая сила жидкости равна весу жидкости в объеме тела и направлена вертикально вверх (закон Архимеда).

◀ Согласно закону Паскаля, погруженная в жидкость площадка испытывает давление, направленное по нормали к ней и равное весу столбика жидкости, основанием которого служит площадка, а высота столбика равна глубине погружения.

Пусть тело T ограничено гладкой или кусочно-гладкой поверхностью S и μ — удельный вес жидкости. Выберем систему координат $Oxyz$ так, чтобы свободная поверхность жидкости совпадала с плоскостью xOy , а ось Oz была направлена вверх. Рассмотрим элемент поверхности $d\sigma$, площадь которого равна dS , и пусть $M = (x, y, z) \in d\sigma$ — произвольная точка. Согласно закону Паскаля, можем написать приближенное равенство $d\mathbf{F}(M) = \mu z \mathbf{n} dS$, где $\mathbf{n}(M)$ — единичный вектор нормали к поверхности S в точке M , z — аппликата этой точки.

Суммируя по всем элементам $d\sigma$ и совершая предельный переход, когда диаметры этих элементов стремятся к нулю, получим формулу для вычисления силы $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \mu \iint_S z \mathbf{n}(M) dS = i\mu \iint_S z \cos \alpha dS + j\mu \iint_S z \cos \beta dS + k\mu \iint_S z \cos \gamma dS.$$

Применив к каждому поверхностному интегралу формулу Остроградского (3), найдем

$$\iint_S z \cos \alpha dS = \iint_S z \cos \beta dS = 0, \quad \iint_S z \cos \gamma dS = \iiint_T dx dy dz = V,$$

где V — объем тела T .

Окончательно получаем $\mathbf{F} = k\mu V = kP$, где P — вес тела T . ►

Рассмотрим несколько примеров на применение формулы Стокса (9).

198. Пусть γ — замкнутый контур, расположенный в плоскости, заданной уравнением $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ и ограничивающий площадку S , $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали $\mathbf{n}$ к плоскости. Найти

$$I = \oint_{\gamma} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

где контур γ пробегается в положительном направлении.

◀ В обозначениях формулы Стокса имеем

$$P = z \cos \beta - y \cos \gamma, \quad Q = x \cos \gamma - z \cos \alpha, \quad R = y \cos \alpha - x \cos \beta.$$

Применив формулу Стокса (9), получим

$$I = 2 \iint_S \cos \alpha \, dy \, dz + \cos \beta \, dz \, dx + \cos \gamma \, dx \, dy = 2 \iint_S (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \, dS = 2 \iint_S dS = 2B,$$

где B — площадь площадки S . ►

Применяя формулу Стокса (9), вычислить интегралы:

199. $I = \oint_{\gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz$, где γ — окружность, полученная в результате пересечения

сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ с плоскостью S_1 , заданной уравнением $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

◀ Применим формулу Стокса, взяв в ней в качестве поверхности круг S_2 радиуса a , лежащий в плоскости S_1 . Получим

$$I = - \iint_{S_2} dy \, dz + dz \, dx + dx \, dy = - \iint_{S_2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \, dS,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$ к плоскости S_1 . Так как вектор $\mathbf{n}$ и орт $\mathbf{k}$ оси Oz образуют острый угол, то в каждой из формул для вычисления $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ перед радикалом в знаменателе следует взять знак "+". Приняв во внимание, что $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, имеем

$$I = -\sqrt{3} \iint_{S_2} dS = -\sqrt{3} \pi a^2,$$

так как площадь круга S_2 равна πa^2 . ►

200. $I = \int_{\gamma} (y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - y) \, dz$, где γ — кривая, полученная в результате

пересечения поверхности S цилиндра $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, z \in \mathbb{R}\}$ с плоскостью S_1 , заданной уравнением $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$, $a > 0, h > 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

◀ По формуле Стокса (9) имеем

$$I = -2 \iint_{S_2} dy \, dz + dz \, dx + dx \, dy = -2 \iint_{S_2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \, dS,$$

где $S_2 = T \cap S_1$ — множество всех точек эллипса

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 \right\},$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$ к плоскости S_1 . Множество точек S_2 проектируется на круг $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Поскольку нормаль к плоскости S_1 образует острый угол с ортом $\mathbf{k}$ оси Oz , то в каждой из формул

$$\cos \alpha = \frac{-z'_x}{\pm \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-z'_y}{\pm \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

перед радикалом в знаменателе следует взять знак "+". Переходя от поверхностного интеграла к двойному и принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \, dx \, dy$, получим

$$I = 2 \iint_D (z'_x(x, y) + z'_y(x, y) - 1) \, dx \, dy.$$

Так как на множестве S_1 выполняется равенство $z = h - \frac{h}{a}x$, то $z'_x = -\frac{h}{a}$, $z'_y = 0$. Следовательно,

$$I = -2 \iint_D \left(1 + \frac{h}{a}\right) dx dy = -2 \left(1 + \frac{h}{a}\right) \pi a^2 = -2\pi a(a + h). \blacktriangleright$$

201. $I = \oint_{\gamma} (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, где γ — кривая, полученная

в результате пересечения полусферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, z > 0\}$ и поверхности $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2rx, z \in \mathbb{R}\}$, $0 < r < R$, пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне полусферы S наименьшая область остается слева.

◀ Применив формулу Стокса, получим поверхностный интеграл

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_{S_2} (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy = \\ &= 2 \iint_{S_2} ((y - z) \cos \alpha + (z - x) \cos \beta + (x - y) \cos \gamma) dS, \end{aligned}$$

где S_2 — кусок полусферы S , вырезанный из нее поверхностью S_1 , $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали n к S_2 . На множестве S_2 выполнены равенства $z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$, $z'_x = \frac{R-x}{z}$, $z'_y = -\frac{y}{z}$. Так как вектор n и орт k оси Oz образуют острый угол, то в формулах для вычисления $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ перед радикалом в знаменателе следует взять знак "+". Принимая во внимание равенство $dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy$, получим

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_D ((y - z(x, y))(-z'_x(x, y)) + (z(x, y) - x)(-z'_y(x, y)) + (x - y)) dx dy = \\ &= 2 \iint_D \left(\frac{(y - z(x, y))(x - R) + (z(x, y) - x)y}{z(x, y)} + x - y \right) dx dy = 2R \iint_D \left(1 - \frac{y}{z(x, y)} \right) dx dy, \end{aligned}$$

где $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2rx\}$. Поскольку

$$\iint_D \frac{y}{z(x, y)} dx dy = \int_0^r dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} \frac{y dy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}} = \int_0^r \left(\sqrt{2Rx-x^2-y^2} \Big|_{y=\sqrt{2rx-x^2}}^{y=-\sqrt{2rx-x^2}} \right) dx = 0,$$

то окончательно имеем

$$I = 2R \iint_D dx dy = 2\pi Rr^2. \blacktriangleright$$

202. $I = \oint_{\gamma} y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz$, где γ — замкнутая кривая, заданная уравнениями

$x = a \cos t$, $y = a \cos 2t$, $z = a \cos 3t$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t .

◀ При изменении t от 0 до π подвижная точка $M = (x, y, z)$ пробегает часть кривой γ от точки $M_0 = (a, a, a)$ до точки $M_1 = (-a, a, -a)$, а при изменении t от π до 2π точка M пробегает ту же самую часть кривой γ в противоположном направлении — от точки M_1 до точки M_0 . Таким образом, точки замкнутой кривой γ взаимно накладываются, и эта кривая не ограничивает никакой поверхности. Следовательно, $I = 0$. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

139. $I = \oint_{\gamma} xy^2 dy - x^2 y dx$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$.

140. $I = \oint_{\gamma} (x+y) dx - (x-y) dy$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

141. $I = \oint_{\gamma} e^{-(x^2+y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$, где $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$.

142. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $(x, y) \mapsto F(x, y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int_{AmB} F(x, y)(y dx + x dy)$$

не зависел от вида пути интегрирования?

143. Вычислить $I = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{X dY - Y dX}{X^2 + Y^2}$, если $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ и простой замкнутый контур γ окружает начало координат ($ad - bc \neq 0$).

144. Вычислить интеграл I (см. предыдущую задачу), если $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$ и простой контур γ окружает начало координат, причем кривые, определяемые уравнениями $\varphi(x, y) = 0$ и $\psi(x, y) = 0$, имеют несколько простых точек пересечения внутри контура γ .

145. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой γ , заданной уравнением

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^n y^m, \quad a > 0, \quad n > 0, \quad m > 0.$$

146. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox простого замкнутого контура γ , расположенного в верхней полуплоскости $y \geq 0$, равен

$$V = -\pi \oint_{\gamma} y^2 dx.$$

Применяя формулу Остроградского, преобразовать следующие поверхностные интегралы, если гладкая поверхность S ограничивает конечный объем V и $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали n к поверхности S :

147. $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$. 148. $\iint_S \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$.

149. $\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS$.

150. Вычислить интеграл $I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, где S — внешняя сторона границы куба $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$.

151. Найти объем тела T , ограниченного поверхностью S , заданной уравнениями $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = -u + a \cos v$, $u \geq 0$, $a > 0$, n плоскостями $x = 0$, $z = 0$.

152. Доказать формулу

$$\iiint_K \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\widehat{r, n}) dS,$$

где S — край компакта K , n — внешняя единичная нормаль к поверхности S в точке (ξ, η, ζ) , $r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (y-\eta)^2 + (\zeta-z)^2}$ и $r = (\xi-x, \eta-y, \zeta-z)$ — радиус-вектор, идущий от точки (x, y, z) к точке (ξ, η, ζ) .

153. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz$, где $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$: а) непосредственно; б) используя формулу Стокса (в качестве поверхности S взять полусферу, заданную уравнением $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$). Интегрирование по окружности γ вести в положительном направлении.

154. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейный интеграл $\oint_{\gamma} y dx + z dy + x dz$,

где γ — окружность, полученная в результате пересечения сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ с плоскостью, заданной уравнением $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

155. Вычислить интеграл

$$\int_{AmB} (x^2 - yz) dx + (y^2 - xz) dy + (z^2 - xy) dz,$$

взятый по отрезку винтовой линии, заданной уравнениями $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$, $z = \frac{h}{2\pi} \varphi$, от точки $A = (a, 0, 0)$ до точки $B = (a, 0, h)$.

Применяя формулу Стокса, вычислить интегралы:

156. $I = \oint_{\gamma} (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$, где γ — эллипс, заданный уравнениями $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t \cos t$, $z = a \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$, пробегаемый в направлении возрастания параметра t .

157. $I = \oint_{\gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, где γ — сечение поверхности куба $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}$ плоскостью, заданной уравнением $x + y + z = \frac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox .

§ 6. Элементы векторного анализа

6.1. Скалярные и векторные поля.

Если каждой точке M пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, или некоторой области этого пространства поставлено в соответствие некоторое число $f(M)$, то говорят, что задано скалярное поле f (например, поле давления в атмосфере, поле плотности сплошного распределения массы в объеме V и т. д.).

Если каждой точке M пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, или области этого пространства поставлен в соответствие некоторый вектор $u(M)$, то говорят, что задано векторное поле u (например, поле тяготения системы масс или сплошного распределения массы в ограниченном объеме, поле плотности импульса, поле плотности тока, поле магнитных сил и т. п.).

6.2. Плотность аддитивной функции областей. Восстановление аддитивной функции по ее плотности.

Пусть $\Phi(K)$ — аддитивная функция компакта K , т.е. функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi(K_1 \cup K_2) = \Phi(K_1) + \Phi(K_2)$$

для любых двух компактов без общих внутренних точек. Число

$$\varphi(M) = \lim_{K \rightarrow M} \frac{\Phi(K)}{\mu K}, \quad (1)$$

где μK — мера компакта K , называется *плотностью функции Φ в точке $M \in K$* .

Если плотность $\varphi(M)$ аддитивной функции областей Φ непрерывна или кусочно-непрерывна на компакте K , то

$$\Phi(K) = \int_K \varphi(x) dx. \quad (2)$$

6.3. Дифференциальный оператор Гамильтона.

Пусть $\{\varphi(M), u(M), \dots\}$ — множество скалярных и векторных полей, имеющих непрерывные производные по всем координатам, и пусть $T(p) = T(p; \varphi(M), u(M), \dots)$ — некоторое выражение, имеющее смысл скаляра или вектора, линейное относительно произвольного вектора p :

$$T(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = \alpha_1 T(p_1) + \alpha_2 T(p_2),$$

где α_1, α_2 — произвольные действительные числа.

Пусть $p = ai + bj + ck$. Тогда, в силу линейности T , имеем

$$T(p) = aT(i) + bT(j) + cT(k). \quad (1)$$

Полагаем

$$T(\nabla) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} T(i) + \frac{\partial}{\partial y} T(j) + \frac{\partial}{\partial z} T(k), \quad (2)$$

заменяя в (1) компоненты вектора p символами дифференцирования по x, y и z соответственно.

Символ ∇ (набла) называется *дифференциальным оператором Гамильтона*.

В векторном анализе наиболее важными выражениями T , о которых упоминалось выше, являются:

- а) $T(p; \varphi) = p\varphi$ (φ — скалярное поле);
- б) $T(p; u) = \langle p, u \rangle$ (скалярное произведение);
- в) $T(p; u) = [p, u]$ (векторное произведение).

На основании (2) получаем:

$$\text{а) } T(\nabla) = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}k;$$

$$\text{б) } T(\nabla) = \langle \nabla, u \rangle = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \text{ если } u = (P, Q, R);$$

$$\text{в) } T(\nabla) = [\nabla, u] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k.$$

Вектор в правой части а) называется *градиентом скалярного поля* φ . Выражение в правой части б) называется *расходимостью* (или *дивергенцией*) *векторного поля* u . Вектор в правой части в) называется *вихрем* (или *ротором*) *векторного поля* u .

6.4. Производная скалярного поля по направлению. Градиент скалярного поля.

Пусть φ — скалярное поле, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, γ — гладкая кривая, лежащая в Ω и проходящая через фиксированную точку $M_0 \in \Omega$, Δl — длина дуги кривой от точки M_0 до точки M . Если при $M \rightarrow M_0$ существует конечный предел отношения

$$\frac{\Delta\varphi(M_0)}{\Delta l} = \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l},$$

то он называется *производной скалярного поля* φ в точке M_0 вдоль кривой γ и обозначается $\frac{\partial\varphi}{\partial l}(M_0)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}(M_0) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l}. \quad (1)$$

Если функция φ дифференцируема в точке M_0 , то ее производная вдоль кривой γ существует и для всех кривых, выходящих из точки M_0 с одной и той же касательной $\tau = (\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1)$, значение этой производной одно и то же, а сама производная называется *производной по данному направлению* τ и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}(M_0) = \langle \text{grad } \varphi(M_0), \tau \rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0) \cos \alpha_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0) \cos \beta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M_0) \cos \gamma_1. \quad (2)$$

Вектор $\text{grad } \varphi(M_0) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M_0) \right)$ направлен из точки M_0 в сторону быстрого возрастания скалярного поля φ , а его евклидова норма равна абсолютной величине производной поля φ в этом направлении.

На гладкой поверхности уровня $\varphi(M) = C$, $C = \text{const}$, касательная плоскость к поверхности в точке M_0 ортогональна вектору $\text{grad } \varphi(M_0)$.

6.5. Потенциальные векторные поля. Циркуляция векторного поля.

Любое векторное поле u , совпадающее с полем градиента некоторого скалярного поля φ , называется *потенциальным*, а функцию φ называют в этом случае *потенциалом* поля u .

Если вектор поля u имеет физический смысл силы, то потенциал φ этого поля имеет физический смысл работы. Работа A силы u на гладкой или кусочно-гладкой кривой γ , соединяющей точку M_0 с точкой M_1 , вычисляется по формуле

$$A = \int_{\gamma} \langle u, \tau \rangle dl, \quad (1)$$

где τ — единичный касательный вектор к кривой γ .

В силу условия $u = \text{grad } \varphi$, из (1) получаем

$$A = \int_{M_0 M_1} \langle \text{grad } \varphi, \tau \rangle dl = \int_{M_0 M_1} \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = \varphi(M_1) - \varphi(M_0), \quad (2)$$

т.е. работа силы на пути $M_0 M_1$ равна разности потенциалов в точках M_1 и M_0 .

Если u — произвольное непрерывное векторное поле, то интеграл по замкнутому контуру

$$\oint_{\gamma} \langle u, \tau \rangle dl \quad (3)$$

называется *циркуляцией* поля u по контуру γ .

Циркуляция непрерывного потенциального векторного поля u по всякому замкнутому контуру γ , лежащему в односвязной области, равна нулю. Справедливо и обратное утверждение: если циркуляция непрерывного векторного поля u равна нулю по любому замкнутому контуру γ , лежащему в односвязной области, то поле u потенциально.

6.6. Поток и расходимость векторного поля.

Пусть S — конечная гладкая или кусочно-гладкая поверхность, u — векторное поле, заданное в области Ω , содержащей все точки поверхности S . Выражение

$$w(u; S) = \iint_S \langle u, n \rangle dS, \quad (1)$$

где n — единичный вектор нормали, характеризующий сторону поверхности, называется *поток*ом поля u через поверхность S . Вычисление потока является линейной операцией. Если поверхность S , ограничивающая область Ω , замкнута и при стягивании области Ω в точку M существует конечный предел

$$\lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{w(u; S)}{\mu \Omega},$$

где $\mu \Omega$ — жорданова мера множества Ω , то он называется *расходимостью* или *дивергенцией* векторного поля u в точке $M \in \Omega$ и обозначается $\text{div } u(M)$:

$$\text{div } u(M) = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{\mu \Omega} \iint_S \langle u, n \rangle dS. \quad (2)$$

Таким образом, по определению $\text{div } u(M)$ есть плотность аддитивной функции областей — потока векторного поля u через замкнутую поверхность S . Если компоненты поля $u = (P, Q, R)$ имеют в области Ω непрерывные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, то справедлива формула

$$\text{div } u(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M), \quad (3)$$

получаемая на основании формулы (2), формулы Остроградского и теоремы о среднем;

Ранее, в п.6.3, показали, что $\text{div } u = \langle \nabla, u \rangle$, где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона.

6.7. Вихрь векторного поля.

Пусть u — непрерывное векторное поле, заданное в конечной области Ω с гладкой или кусочно-гладкой границей S , $n(M)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке M . Вектор-функция

$$Q(\Omega) = \iint_S [n, u] dS \quad (1)$$

называется *циркуляцией поля u по границе области Ω* . Если существует конечный предел

$$q(P) = \lim_{\Omega \rightarrow P} \frac{Q(\Omega)}{\mu\Omega}, \quad (2)$$

то вектор q называется *вихрем или ротором поля u в точке $P \in \Omega$* и обозначается $\text{rot } u(P)$:

$$\text{rot } u(P) = \lim_{\Omega \rightarrow P} \frac{1}{\mu\Omega} \iint_S [n, u] dS, \quad (3)$$

где $\mu\Omega$ — жорданова мера множества Ω .

Таким образом, по определению, $\text{rot } u(P)$ есть плотность аддитивной функции областей — циркуляции векторного поля u по границе области Ω .

Если компоненты поля $u = (P, Q, R)$ имеют непрерывные частные производные по переменным x, y и z , то вихрь поля u в точке $P' \in \Omega$ можно вычислить по формуле

$$\text{rot } u(P') = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k. \quad (4)$$

В п.6.3 было показано, что $\text{rot } u = [\nabla, u]$.

Классические формулы Остроградского и Стокса в обозначениях векторного анализа принимают соответственно вид

$$\iiint_{\Omega \cup S} \text{div } u \, dx \, dy \, dz = \iint_S \langle u, n \rangle dS, \quad (5)$$

$$\iint_S \langle \text{rot } u, n \rangle dS = \oint_{\gamma} \langle u, \tau \rangle dl. \quad (6)$$

Определение. Если в каждой точке M области Ω выполняется равенство $\text{rot } u(M) = 0$, то поле u называется *безвихревым*.

Теорема. В односвязной области всякое безвихревое поле потенциально.

6.8. Дифференциальные операции первого порядка.

В выражениях $T(\nabla; \varphi, u, \dots)$, рассмотренных в п.6.3, можно производить любые тождественные преобразования, допускаемые правилами линейной алгебры, считая при этом символ ∇ вектором, например:

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi_1 + \varphi_2) &= \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2, \\ \langle \nabla, u_1 + u_2 \rangle &= \langle \nabla, u_1 \rangle + \langle \nabla, u_2 \rangle, \\ [\nabla, u_1 + u_2] &= [\nabla, u_1] + [\nabla, u_2]. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема. Если оператор ∇ действует на произведение (численное, скалярное, векторное) двух величин, то результат можно представлять как сумму двух слагаемых того же вида, в каждом из которых ∇ действует на один из сомножителей и не действует на другой, аналогично правилу обычного дифференцирования произведения двух числовых функций.

203. Пусть $u = xy - z^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Найти величину и направление $\text{grad } u$ в точке $M = (-9, 12, 10)$. Чему равна производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ в направлении биссектрисы координатного угла xOy ?

◀ Используя определение градиента скалярного поля, получаем

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M) \right) = (12, -9, -20), \quad \|\operatorname{grad} u(M)\| = \sqrt{12^2 + 9^2 + 20^2} = 25.$$

Направление $\operatorname{grad} u(M)$ определяется вектором

$$e(M) = \frac{\operatorname{grad} u(M)}{\|\operatorname{grad} u(M)\|} = \left(\frac{12}{25}, -\frac{9}{25}, -\frac{4}{5} \right) = (\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1).$$

Единичный вектор τ , выходящий из начала координат в направлении биссектрисы первого координатного угла, имеет вид $\tau = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$. Согласно формуле (2), п.6.4, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \langle \operatorname{grad} u(M), \tau \rangle = \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \blacktriangleright$$

204. В каких точках пространства $Oxyz$ градиент поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$: а) перпендикулярен к оси Oz ; б) параллелен оси Oz ; в) равен нулю?

◀ Из определения градиента скалярного поля следует, что $\operatorname{grad} u(x, y, z) = (3(x^2 - yz), 3(y^2 - xz), 3(z^2 - xy))$. В случае а) имеем $\langle \operatorname{grad} u, k \rangle = 3(z^2 - xy) = 0$, откуда $z^2 = xy$.

В случае б) вектор $\operatorname{grad} u(x, y, z)$ коллинеарен орту k оси Oz , вследствие чего в каждой точке искомого множества должны одновременно выполняться равенства $x^2 - yz = 0$, $y^2 - xz = 0$. Исключив из них z , найдем $x^3 - y^3 = 0$, откуда $x = y$ и $x^2 + xy + y^2 = 0$. Второе равенство выполняется лишь в случае, когда $x = y = 0$. Подставляя $x = y$ в любое из исходных равенств, получаем, что $x = y = z$. Следовательно, градиент скалярного поля u параллелен оси Oz в точках $x = y = 0$ и в точках $x = y = z$.

В случае в) получаем равенства $x^2 - yz = 0$, $y^2 - xz = 0$, $z^2 - xy = 0$, которые должны выполняться одновременно. Используя результат, полученный при рассмотрении случая б), имеем $x = y = z$. $\blacktriangleright$

205. Дано скалярное поле $u = \ln \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. В каких точках пространства $Oxyz$ выполняется равенство $\|\operatorname{grad} u\| = 1$?

◀ Принимая во внимание равенства $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^2}$, получаем $\|\operatorname{grad} u\| = \frac{1}{r}$.

Равенство $\|\operatorname{grad} u\| = 1$ выполняется на сфере единичного радиуса с центром в точке $M = (a, b, c)$, т.е. на множестве точек $r = 1$. $\blacktriangleright$

206. Найти косинус угла α между градиентами поля $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $A = (1, 2, 2)$ и $B = (-3, 1, 0)$.

◀ Косинус угла α вычислим по формуле

$$\cos \alpha = \frac{\langle \operatorname{grad} u(A), \operatorname{grad} u(B) \rangle}{\|\operatorname{grad} u(A)\| \|\operatorname{grad} u(B)\|}.$$

Обозначив $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, последовательно получим

$$u = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{r^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{r^4}, \quad r(A) = 3, \quad r(B) = \sqrt{10},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = \frac{7}{81}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A) = -\frac{4}{81}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(A) = -\frac{4}{81}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(B) = -\frac{2}{25}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(B) = \frac{3}{50}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(B) = 0,$$

$$\langle \operatorname{grad} u(A), \operatorname{grad} u(B) \rangle = -\frac{4}{405}, \quad \|\operatorname{grad} u(A)\| \|\operatorname{grad} u(B)\| = \frac{1}{90}, \quad \cos \alpha = -\frac{4}{405} : \frac{1}{90} = -\frac{8}{9}. \blacktriangleright$$

207. Вычислить: а) $\operatorname{grad} r$; б) $\operatorname{grad} r^2$; в) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

◀ Рассмотрим скалярное поле $\varphi(M) = f(r)$, $r \in \mathbb{R}$, где f — дифференцируемая функция. Его поверхности уровня — сферы с центром в начале координат $O = (0, 0, 0)$. Градиент поля

φ направлен по нормали к сфере, т.е. по радиусу OM . Функция f возрастает, если $f'(r) > 0$, и убывает, если $f'(r) < 0$, поэтому вектор $\text{grad } f(r)$ направлен в сторону возрастания r , если $f'(r) > 0$, и в сторону убывания r , если $f'(r) < 0$, причем $\|\text{grad } f(r)\| = |f'(r)|$. В силу сказанного выше, имеем

$$\text{grad } f(r) = \frac{f'(r)}{r} \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M = (x, y, z)$.

В случае а) $f'(r) = 1$, поэтому $\text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}(O, M)$. В случае б) $f'(r) = 2r$, поэтому $\text{grad } r^2 = 2\mathbf{r}$. В случае в) $f'(r) = -\frac{1}{r^2}$, в силу чего $\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$. ▶

208. Доказать формулу $\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle$, где $\nabla^2 = \langle \nabla, \nabla \rangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

◀ Записав $\nabla^2(uv) = \langle \nabla, \nabla(uv) \rangle$ и воспользовавшись правилами действий оператором Гамильтона, получим

$$\begin{aligned} \nabla(uv) &= v\nabla u + u\nabla v, \quad \langle \nabla, \nabla(uv) \rangle = \langle \nabla, v\nabla u \rangle + \langle \nabla, u\nabla v \rangle = \\ &= v\nabla^2 u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle + u\nabla^2 v + \langle \nabla v, \nabla u \rangle = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

209. Доказать, что если функция u дифференцируема в выпуклой области $V \subset \mathbb{R}^3$ и $\|\text{grad } u\| \leq M$, где $M = \text{const}$, то для любых точек A и B из V имеем $|u(A) - u(B)| \leq M\rho(A, B)$, где $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B .

◀ Обозначив $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x_1, y_1, z_1)$, $P = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ и используя свойство дифференцируемости функции u , получим

$$|u(A) - u(B)| = |du(\xi)|, \quad \xi \in V.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} |du(\xi)| &= \left| \frac{\partial u}{\partial x}(\xi)(x_0 - x_1) + \frac{\partial u}{\partial y}(\xi)(y_0 - y_1) + \frac{\partial u}{\partial z}(\xi)(z_0 - z_1) \right| = \\ &= |\langle \text{grad } u(\xi), P \rangle| \leq \|\text{grad } u(\xi)\| \|P\| = \|\text{grad } u(\xi)\| \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2} = \\ &= \|\text{grad } u(\xi)\| \rho(A, B) \leq M\rho(A, B), \end{aligned}$$

то $|u(A) - u(B)| \leq M\rho(A, B)$. ▶

210. Найти производную поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, в данной точке $M = (x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора $\mathbf{r}$ этой точки. В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

◀ По формуле (2), п.6.4, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}(M) = \left\langle \text{grad } u(M), \frac{\mathbf{r}}{r} \right\rangle = \frac{1}{r} \langle \text{grad } u(M), \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{r} \left(\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} + \frac{2z^2}{c^2} \right) = \frac{2}{r} u(M),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Из условия $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}(M) = \|\text{grad } u(M)\|$ получаем $\frac{\text{grad } u(M)}{\|\text{grad } u(M)\|} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Последнее равенство, как легко проверить, выполняется, если $a = b = c$. ▶

211. Найти дивергенцию поля $\mathbf{u} = \frac{-ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M = (3, 4, 5)$. Чему приближенно равен поток вектора $\mathbf{u}$ через бесконечно малую сферу

$$S_\epsilon = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = \epsilon^2\}?$$

◀ С помощью формулы (3), п.6.6, получаем

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\text{div } \mathbf{u}(M) = \frac{18}{125}.$$

Дивергенция поля u является плотностью аддитивной функции областей — потоков $w(u; S)$, для восстановления которого следует применить формулу (2), п.6.2:

$$w(u; S) = \iiint_T \operatorname{div} u(x, y, z) dx dy dz,$$

где $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 \leq \varepsilon^2\}$.

Поскольку шар бесконечно мал, т.е. $\varepsilon \rightarrow +0$, то можем взять $\operatorname{div} u(x, y, z) \approx \operatorname{div} u(M) = \frac{18}{125}$. При этом получим

$$w(u; S) \approx \iiint_T \operatorname{div} u(M) dx dy dz = \frac{18}{125} \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = \frac{24}{125} \pi \varepsilon^3. \blacktriangleright$$

212. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В каком случае $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = 0$?

◀ В примере 207 получена формула $\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r} \mathbf{r}$ в предположении, что функция f дифференцируема. Здесь будем считать, что она дважды дифференцируема. Обозначив $\frac{f'(r)}{r} = \varphi(r)$, запишем упомянутую формулу в виде $\operatorname{grad} f(r) = \varphi(r) \mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Пользуясь оператором ∇ и правилами действий с ним, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) &= \langle \nabla, \varphi(r) \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{r}, \nabla \varphi(r) \rangle + \varphi(r) \langle \nabla, \mathbf{r} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{r}, \operatorname{grad} \varphi(r) \rangle + \varphi(r) \operatorname{div} \mathbf{r} = \langle \mathbf{r}, \operatorname{grad} \varphi(r) \rangle + 3\varphi(r), \end{aligned}$$

так как $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$. Принимая во внимание равенства $\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r} \mathbf{r}$, $\langle \mathbf{r}, \operatorname{grad} \varphi \rangle = \left\langle \mathbf{r}, \frac{\varphi'(r)}{r} \mathbf{r} \right\rangle = \frac{\varphi'(r)}{r} r^2 = r\varphi'(r)$, находим

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r)) = r\varphi'(r) + 3\varphi(r) = f''(r) - \frac{f'(r)}{r} + \frac{3f'(r)}{r} = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r},$$

так как $\varphi'(r) = \frac{f''(r)}{r} + \frac{f'(r)}{r^2}$.

Приравнявая $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$ к нулю, получим дифференциальное уравнение $(rf'(r))' + f'(r) = 0$, решая которое, находим $rf'(r) + f(r) = c_1$. Применив метод вариации произвольной постоянной, окончательно получим $f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные. ▶

213. Найти: а) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; б) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

◀ Применив оператор ∇ , получим:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) &= \langle \nabla, u \operatorname{grad} u \rangle = \langle \operatorname{grad} u, \nabla u \rangle + u \langle \nabla, \operatorname{grad} u \rangle = \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} u \rangle + u \langle \nabla, \nabla u \rangle = \\ &= |\operatorname{grad} u|^2 + u \nabla^2 u = |\operatorname{grad} u|^2 + u \Delta u, \text{ где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ — оператор Лапласа.} \end{aligned}$$

$$\text{б) } \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \langle \nabla, u \operatorname{grad} v \rangle = \langle \operatorname{grad} v, \nabla u \rangle + u \langle \nabla, \operatorname{grad} v \rangle = \langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v \rangle + u \Delta v. \blacktriangleright$$

214. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси Oz против хода часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω . Найти расходимость вектора скорости v и вектора ускорения w в точке $M = (x, y, z)$ пространства в данный момент времени.

◀ Линейная скорость v частицы жидкости в точке M равна вектору $v = [\omega, \mathbf{r}]$, где $\omega = \omega \mathbf{k}$, $\mathbf{r} = ix + jy + kz$. Получаем

$$v = j\omega x - i\omega y, \quad \operatorname{div} v(M) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega y) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega x) = 0.$$

Ускорение $w(x, y, z)$ выражается формулой

$$w = [\omega, v] = [\omega, [\omega, \mathbf{r}]] = \omega \langle \omega, \mathbf{r} \rangle - \mathbf{r} \langle \omega, \omega \rangle = k\omega^2 z - \omega^2 \mathbf{r} = -\omega^2(ix + jy).$$

Согласно формуле (3), п.6.6, имеем

$$\operatorname{div} w(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(-\omega^2 x) + \frac{\partial}{\partial y}(-\omega^2 y) = -2\omega^2. \blacktriangleright$$

215. Найти дивергенцию гравитационного силового поля, создаваемого системой притягивающих центров.

◀ Рассмотрим векторное поле $F(P)$, создаваемое системой материальных точек m_j , $j = \overline{1, n}$, помещенных в точках M_j , $j = \overline{1, n}$. Это поле задано формулой

$$F(P) = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r^3(P, M_j)} r(P, M_j), \quad P \neq M_j,$$

где $r(P, M_j)$ — радиус-вектор, проведенный из точки P в точку M_j , $r(P, M_j)$ — его длина. Поскольку вычисление дивергенции является линейной операцией, то

$$\operatorname{div} F(P) = \sum_{j=1}^n \operatorname{div} \left(\frac{m_j}{r^3(P, M_j)} r(P, M_j) \right).$$

Таким образом, задача свелась к вычислению расходимости поля $F_j(P) = \varphi_j(r)r$, где $\varphi_j(r) = \frac{m_j}{r^3(P, M_j)}$, рассмотренного в примере 212. Там было показано, что $\operatorname{div} F_j(P) = r\varphi_j'(r) + 3\varphi_j(r)$. Подставив сюда $r\varphi_j'(r) = -3\frac{m_j}{r^2}$, получим

$$\operatorname{div} F_j(P) = -\frac{3m_j}{r} + \frac{3m_j}{r} = 0, \quad \operatorname{div} F(P) = 0.$$

Результат объясняется тем, что поле тяготения не имеет источников вне масс m_j , в силу чего мощность источников этого поля, характеризующая расходимостью, равна нулю. ▶

216. Доказать формулу $\operatorname{rot}(\varphi u) = \varphi \operatorname{rot} u + [\operatorname{grad} \varphi, u]$.

◀ Применив оператор Гамильтона, находим

$$\operatorname{rot}(\varphi u) = [\nabla, \varphi u] = [\nabla, \varphi u_c] + [\nabla, \varphi_c u],$$

где значок “с” указывает, что оператор набла на данный объект не действует. Если объект, на который оператор ∇ не действует, находится позади ∇ , то будем индекс “с” опускать. Имеем

$$\operatorname{rot}(\varphi u) = -[u, \nabla \varphi] + \varphi [\nabla, u] = -[u, \operatorname{grad} \varphi] + \varphi \operatorname{rot} u = \varphi \operatorname{rot} u + [\operatorname{grad} \varphi, u]. \quad \blacktriangleright$$

217. Найти $\operatorname{rot}(f(r)r)$, где $r = (x, y, z)$.

◀ На основании формулы, доказанной в примере 216, имеем: $\operatorname{rot}(f(r)r) = [\nabla, f(r)r] = f(r)\operatorname{rot} r + [\operatorname{grad} f(r), r]$. С помощью формулы (4), п.6.7, находим

$$\operatorname{rot} r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Решая пример 207, мы нашли, что $\operatorname{grad} f(r) = \frac{f'(r)}{r} r$. Таким образом, окончательно имеем:

$$\operatorname{rot}(f(r)r) = \left[\frac{f'(r)}{r} r, r \right] = 0. \quad \blacktriangleright$$

218. Найти а) $\operatorname{rot} cf(r)$; б) $\operatorname{rot}[c, f(r)r]$ (c — постоянный вектор).

◀ а) Пользуясь обозначениями и правилами, которые были применены при решении примера 216, получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} cf(r) &= [\nabla, cf(r)] = [\nabla, cf_c(r)] + [\nabla, c_c f(r)] = f(r)[\nabla, c] - [c, \nabla f(r)] = \\ &= f(r)\operatorname{rot} c + [\operatorname{grad} f(r), c] = \left[\frac{f'(r)}{r} r, c \right] = \frac{f'(r)}{r} [r, c]. \end{aligned}$$

б) Воспользуемся известной формулой векторной алгебры: $[a, [b, c]] = b\langle a, c \rangle - c\langle a, b \rangle$. Действуя оператором ∇ на вектор $[c, R]$, где $R = f(r)r$, находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} [c, R] &= [\nabla, [c, R]] = [\nabla, [c, R_c]] + [\nabla, [c_c, R]] = \\ &= c\langle \nabla, R_c \rangle - R\langle \nabla, c \rangle + c\langle \nabla, R \rangle - R\langle \nabla, c_c \rangle = \langle R, \nabla \rangle c - R\langle \nabla, c \rangle + c\langle \nabla, R \rangle - \langle c, \nabla \rangle R = \\ &= \langle R, \nabla \rangle c - R \operatorname{div} c + c \operatorname{div} R - \langle c, \nabla \rangle R. \end{aligned}$$

Так как c — постоянный вектор, то справедливы равенства

$$\langle R, \nabla \rangle c = f(r) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) c = f(r) \left(x \frac{\partial c}{\partial x} + y \frac{\partial c}{\partial y} + z \frac{\partial c}{\partial z} \right) = 0, \quad \operatorname{div} c = 0,$$

в силу которых

$$\operatorname{rot} [c, R] = c \operatorname{div} R - \langle c, \nabla \rangle R. \quad (*)$$

При решении примера 212 мы нашли $\operatorname{div} R = rf'(r) + 3f(r)$. Чтобы решить пример до конца, требуется вычислить $\langle c, \nabla \rangle R$. Пусть вектор c имеет вид $c = (\alpha, \beta, \gamma)$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \langle c, \nabla \rangle R &= \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \right) f(r)r = \\ &= \alpha \left(\frac{f'(r)}{r} xr + if(r) \right) + \beta \left(\frac{f'(r)}{r} yr + jf(r) \right) + \gamma \left(\frac{f'(r)}{r} zr + kf(r) \right) = \\ &= f(r)c + \frac{f'(r)}{r} r\langle c, r \rangle. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (*), находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} [c, f(r)r] &= c (rf'(r) + 3f(r)) - f(r)c - \frac{f'(r)}{r} r\langle c, r \rangle = \\ &= 2f(r)c + \frac{f'(r)}{r} c\langle r, r \rangle - \frac{f'(r)}{r} r\langle c, r \rangle = 2f(r)c + \frac{f'(r)}{r} (c\langle r, r \rangle - r\langle c, r \rangle). \blacktriangleright \end{aligned}$$

219. Доказать формулу $\operatorname{div} [R_1, R_2] = \langle R_2, \operatorname{rot} R_1 \rangle - \langle R_1, \operatorname{rot} R_2 \rangle$.

◀ Действуя по той же схеме, что и при решении примеров 216—218, получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [R_1, R_2] &= \langle \nabla, [R_1, R_2] \rangle = \langle \nabla, [R_1, R_2^c] \rangle + \langle \nabla, [R_1^c, R_2] \rangle = \\ &= \langle R_2, [\nabla, R_1] \rangle - \langle R_1, [\nabla, R_2] \rangle = \langle R_2, \operatorname{rot} R_1 \rangle - \langle R_1, \operatorname{rot} R_2 \rangle. \end{aligned}$$

(воспользовались известным правилом векторной алгебры для смешанного произведения: $\langle a, [b, c] \rangle = \langle b, [c, a] \rangle = \langle c, [a, b] \rangle$). ▶

220. Жидкость, заполняющая пространство, вращается вокруг оси $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ с постоянной угловой скоростью ω . Найти вихрь вектора линейной скорости v в точке пространства $M = (x, y, z)$ в данный момент времени.

◀ Направление вектора угловой скорости ω совпадает с направлением e , поэтому $\omega = \omega e$. Вектор линейной скорости v частицы жидкости в точке M определяется формулой $v = [\omega, r]$, где $r = (x, y, z)$.

Для вычисления вихря векторного поля скоростей v воспользуемся формулой, полученной при решении примера 218, полагая в ней $c = \omega$, $f(r) = 1$. Находим: $\operatorname{rot} v = 2\omega$. ▶

221. Найти поток вектора $r = (x, y, z)$: а) через боковую поверхность конуса $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2; 0 \leq z \leq h\}$; б) через основание этого конуса.

◀ Для вычисления потока воспользуемся формулой (1), п.6.6, которая в данном случае принимает вид:

$$w(r; S) = \iint_S \langle n(M), r(M) \rangle dS.$$

В случае а) единичный вектор нормали в каждой точке на боковой поверхности S_6 конуса ортогонален к вектору r , вследствие чего $w(r; S_6) = 0$.

В случае б) единичный вектор нормали коллинеарен орту k в каждой точке основания S_0 конуса, поэтому получаем:

$$w(r; S_0) = \iint_{S_0} z dS = h \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} dx dy = \pi h^3. \blacktriangleright$$

222. Найти поток радиуса-вектора r через поверхность, уравнение которой $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$).

◀ Поверхность S конуса замкнута, поэтому здесь проще всего воспользоваться формулой восстановления аддитивной функции областей (в данном случае потока) с помощью формулы (2), п.6.2:

$$w(r; S) = \iiint_V \operatorname{div} r dx dy dz.$$

Очевидно, $\operatorname{div} r = 3$, в силу чего имеем:

$$w(r; S) = 3 \iiint_V dx dy dz = 3Q,$$

где Q — численное значение объема тела V . Тело V — прямой круговой конус, высота которого и радиус основания равны 1, поэтому $Q = \frac{\pi}{3}$. Окончательно получаем: $w(r; S) = \pi$. ▶

223. Найти поток вектора $R = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ через сферу, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

◀ Как и при решении предыдущего примера, воспользуемся формулой

$$w(R; S) = \iiint_V \operatorname{div} R dx dy dz,$$

где V — замкнутый шар $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq x\}$. Подставив в интеграл значение $\operatorname{div} R = 3(x^2 + y^2 + z^2)$, получим:

$$w(R; S) = 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Перейдем в интеграле к сферическим координатам. После замены найдем:

$$\begin{aligned} w(R; S) &= 3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin \theta \cos \varphi} \rho^4 d\rho = \frac{3}{5} \int_0^\pi \sin^6 \theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{12}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{12}{5} \frac{5!!}{6!!} \frac{\pi}{2} \frac{4!!}{5!!} = \frac{\pi}{5}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

224. Найти поток вектора $u = \frac{m}{r^3} r$ (m — постоянная) через замкнутую поверхность S , окружающую начало координат.

◀ По определению потока имеем (считая поверхность гладкой или кусочно-гладкой):

$$w(u; S) = \iint_S \langle u, n \rangle dS = m \iint_S \left(\frac{x}{r^3} \cos \alpha + \frac{y}{r^3} \cos \beta + \frac{z}{r^3} \cos \gamma \right) dS.$$

Решение примера свелось к вычислению интеграла Гаусса (см. пример 186), когда замкнутая поверхность окружает фиксированную точку (в данном случае начало координат). Таким образом, $w(u; S) = 4\pi m$. ►

225. Найти поток вектора $F(r) = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right)$, где e_i — постоянные и r_i — расстояния точек M_i (источников) от переменной точки $M(r)$, через замкнутую поверхность S , окружающую точки M_i ($i = \overline{1, n}$).

◀ Векторное поле $u(r)$, рассмотренное в предыдущем примере, можно представить в виде $u(r) = \text{grad} \left(-\frac{m}{r} \right)$, вследствие чего приходим к выводу, что рассматриваемое поле $F(r)$ является суммой полей вида $u(r)$, для которых $m = \frac{e_i}{4\pi}$. На основании решения предыдущего примера можно сразу записать:

$$w(F; S) = \sum_{i=1}^n 4\pi \frac{e_i}{4\pi} = \sum_{i=1}^n e_i. \quad \blacktriangleright$$

226. Найти работу вектора $F = r$ вдоль отрезка винтовой линии $r = ia \cos t + ja \sin t + kbt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

◀ Работу поля F вычислим с помощью формулы (1), п.6.5. Найдем единичный касательный вектор τ в каждой точке кривой:

$$\tau = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a \sin t, a \cos t, b).$$

Таким образом, получим

$$A = b^2 \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2 b^2$$

(приняв во внимание равенства $\langle F, \tau \rangle = \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt$). ►

227. Найти работу поля $R = \frac{i}{y} + \frac{j}{z} + \frac{k}{x}$ вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки $M = (1, 1, 1)$ и $N = (2, 4, 8)$.

◀ Очевидно, $\tau = \frac{1}{|MN|} (1, 3, 7) = \left(\frac{1}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{7}{\sqrt{59}} \right)$ — единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\overrightarrow{MN}$, в силу чего имеем:

$$\langle R, \tau \rangle = \frac{1}{\sqrt{59}} \left(\frac{1}{y} + \frac{3}{z} + \frac{7}{x} \right).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки M и N , имеет вид $x - 1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{7}$, и мы можем параметризовать эту прямую, выбрав в качестве параметра переменную x . При этом получим: $x = x$, $y = 3x - 2$, $z = 7x - 6$, $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{59} dx$,

$$\begin{aligned} A &= \int_{MN} \langle R, \tau \rangle dl = \int_1^2 \left(\frac{1}{3x-2} + \frac{3}{7x-6} + \frac{7}{x} \right) dx = \\ &= \left(\frac{1}{3} \ln(3x-2) + \frac{3}{7} \ln(7x-6) + 7 \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{188}{21} \ln 2. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

228. Найти работу поля $R = (y+z)i + (z+x)j + (x+y)k$ вдоль меньшей дуги окружности большого круга сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25\}$, если эта дуга соединяет точки $M = (3, 4, 0)$ и $N = (0, 0, 5)$.

Рассматриваемая дуга лежит в плоскости, уравнение которой $y = \frac{4}{3}x$, и представляет собой четверть окружности радиуса 5. Параметризуем эту кривую, выбрав в качестве параметра угол φ , образованный радиусом-вектором точки кривой, лежащим в упомянутой выше плоскости, с его проекцией на плоскость xOy . Тогда параметрические уравнения данной дуги будут иметь вид $x = 3 \cos \varphi$, $y = 4 \cos \varphi$, $z = 5 \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), и единичный касательный вектор τ в каждой ее точке будет выражаться формулой

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 + (z'(\varphi))^2}} (x'(\varphi), y'(\varphi), z'(\varphi)) = \left(-\frac{3}{5} \sin \varphi, -\frac{4}{5} \sin \varphi, \cos \varphi \right).$$

Вектор R на данной дуге принимает вид

$$R = (4 \cos \varphi + 5 \sin \varphi) \mathbf{i} + (5 \sin \varphi + 3 \cos \varphi) \mathbf{j} + (7 \cos \varphi) \mathbf{k},$$

поэтому имеем: $\langle R, \tau \rangle = 7 \cos 2\varphi - \frac{12}{5} \sin 2\varphi$. Применяв формулу (1), п.6.5, и приняв во внимание равенство $dl = 5 d\varphi$, получим:

$$A = \int_{MN} \langle R, \tau \rangle dl = 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(7 \cos 2\varphi - \frac{12}{5} \sin 2\varphi \right) d\varphi = 5 \left(\frac{7}{2} \sin 2\varphi + \frac{6}{5} \cos 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -12. \blacktriangleright$$

229. Найти циркуляцию Γ вектора $R = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ (c — постоянная): а) вдоль окружности $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$; б) вдоль окружности $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.

Циркуляция поля R вдоль замкнутого контура γ равна, по определению, интегралу

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \langle R, \tau \rangle dl.$$

В случае а) возьмем параметрические уравнения окружности в виде $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = 0$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Тогда получим: $\tau = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$, $R = -i \sin \varphi + j \cos \varphi + kc$, $\langle R, \tau \rangle = 1$, $dl = d\varphi$,

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \langle R, \tau \rangle dl = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

В случае б) параметрические уравнения окружности берем в виде $x = 2 + \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = 0$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$). При этом получаем: $\tau = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$, $R = -i \sin \varphi + j(2 + \cos \varphi) + kc$, $\langle R, \tau \rangle = 1 + 2 \cos \varphi$, $dl = d\varphi$,

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi) d\varphi = 2\pi. \blacktriangleright$$

230. Найти циркуляцию Γ вектора $R = \text{grad} \left(\arctg \frac{y}{x} \right)$ вдоль контура γ в двух случаях: а) γ не окружает оси Oz ; б) γ окружает ось Oz .

Поле R — потенциальное, поэтому в случае а) его циркуляция Γ вдоль любого контура, не содержащего особых точек функции $(x, y) \mapsto \arctg \frac{y}{x}$, равна нулю.

В случае б) имеем:

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \langle R, \tau \rangle dl = \oint_{\gamma} \left\langle \text{grad} \left(\arctg \frac{y}{x} \right), \tau \right\rangle dl = \oint_{\gamma} \frac{\partial}{\partial l} \left(\arctg \frac{y}{x} \right) dl = \arctg \frac{y}{x} \Big|_{\gamma}$$

(напомним читателю, что выражение $\langle \text{grad} \varphi, \tau \rangle$, где τ — единичный касательный вектор к некоторой кривой, равно производной скалярного поля φ вдоль этой кривой).

Обозначив $\frac{y}{x} = \text{tg} \theta$, получаем, что циркуляция поля R по замкнутому контуру γ равна приращению угла θ при его обходе. При каждом полном обходе угол θ получает приращение

2π (так как контур γ окружает ось Oz и его проекция на плоскость xOy окружает начало координат), поэтому в общем случае $\Gamma = 2\pi n$, где n — число полных обходов контура γ вокруг оси Oz . ►

231. Дано векторное поле $R = \frac{y}{\sqrt{z}}i - \frac{x}{\sqrt{z}}j + \sqrt{xy}k$. Вычислить $\text{rot } R$ в точке $M = (1, 1, 1)$ и найти приближенно циркуляцию Γ поля вдоль бесконечно малой окружности $L = S \cap T$, где $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \varepsilon^2\}$, T — плоскость, заданная уравнением $(x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta + (z-1)\cos\gamma = 0$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

◀ Применяв формулу (4), п.6.7, получим:

$$\begin{aligned}\text{rot } R &= \left(\frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{xy}) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{x}{\sqrt{z}} \right) \right) i + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{y}{\sqrt{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{xy}) \right) j + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{\sqrt{z}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{z}} \right) \right) k = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{x}{z\sqrt{z}} \right) i - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right) j - \frac{2}{\sqrt{z}} k. \\ \text{rot } R(M) &= -j - 2k.\end{aligned}$$

Циркуляцию Γ поля R вдоль заданной окружности вычислим с помощью формулы Стокса

$$\Gamma = \iint_{\sigma} \langle n, \text{rot } R \rangle d\sigma,$$

где σ — кусок плоскости T , ограниченный окружностью L . На плоскости T имеем: $z = 1 - \frac{1}{\cos\gamma}((x-1)\cos\alpha + (y-1)\cos\beta)$, $z'_x = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $z'_y = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\langle n, \text{rot } R(M) \rangle = -\cos\beta - 2\cos\gamma$.

Подставив скалярное произведение под знак интеграла, найдем:

$$\Gamma \approx - \iint_{\sigma} (\cos\beta + 2\cos\gamma) d\sigma = -(\cos\beta + 2\cos\gamma)\pi\varepsilon^2,$$

так как σ — круг радиуса ε , лежащий в рассматриваемой плоскости T . ►

232. Показать, что поле $R = yz(2x+y+z)i + xz(x+2y+z)j + xy(x+y+2z)k$ потенциальное и найти его потенциал.

◀ Поле потенциально, поскольку $\text{rot } R = 0$ (убедиться в этом предоставляем читателю).

В силу потенциальности поля R , имеем: $R = \text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}k$.

Из равенств $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = yz(2x+y+z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xz(x+2y+z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy(x+y+2z)$ находим: $\varphi(x, y, z) = xyz(x+y+z) + \psi(y, z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xz(x+2y+z) = xz(x+2y+z) + \frac{\partial\psi}{\partial y}$, откуда $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$, $\psi = \Phi(z)$.

Из равенства $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy(x+y+2z) = xy(x+y+2z) + \Phi'(z)$ получаем: $\Phi'(z) = 0$, $\Phi(z) = C$, где $C = \text{const}$.

Окончательно имеем: $\varphi(x, y, z) = xyz(x+y+z) + C$, где C — произвольная постоянная. ►

233. Найти потенциал гравитационного поля $R = -\frac{m}{r^3}r$, создаваемого массой m , находящейся в начале координат.

◀ Принимая во внимание равенство $R = \text{grad } \frac{m}{r}$, находим потенциал φ поля R : $\varphi = \frac{m}{r}$. ►

Упражнения для самостоятельной работы

158. Найти угол φ между градиентами функции $u = \text{arctg } \frac{x}{y}$ в точках $M_1 = (1, 1)$ и $M_2 = (-1, -1)$.

159. Найти производную скалярного поля $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, в направлении $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. В каком случае эта производная равна нулю?

160. Найти производную поля u в направлении градиента поля v . В каком случае эта производная будет равна нулю?

161. Найти

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

162. Вычислить $\operatorname{div}(f(r)c)$, где c — постоянный вектор.163. Найти $\operatorname{div}(f(r)r)$. В каком случае дивергенция этого вектора равна нулю?164. Найти поток вектора $u = xyi + yzj + xzk$ через часть сферы $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, лежащую в первом октанте.165. Найти поток вектора $u = yzi + xzj + xyk$ через боковую поверхность пирамиды с вершиной в точке $P = (0, 0, 2)$, основанием которой служит треугольник с вершинами $O = (0, 0, 0)$, $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$.166. Доказать, что: а) $\operatorname{rot}(u + v) = \operatorname{rot} u + \operatorname{rot} v$; б) $\operatorname{rot}(vu) = v \operatorname{rot} u + [\operatorname{grad} v, u]$.167. Найти направление и величину $\operatorname{rot} u$ в точке $M = (1, 2, -2)$, если $u = \frac{y}{z}i + \frac{z}{x}j + \frac{x}{y}k$.168. Найти $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi)$.169. Движущаяся несжимаемая жидкость заполняет область Ω . Предполагая, что в области Ω отсутствуют источники и стоки, вывести уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho v) = 0,$$

где $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность жидкости, v — вектор скорости, t — время.

170. Вычислить работу силового поля

$$F = yi + xj + (x + y + z)k$$

вдоль отрезка AB прямой, проходящей через точки $M_1 = (2, 3, 4)$ и $M_2 = (3, 4, 5)$.171. Доказать, что поле $u = f(r)r$, где f — непрерывная функция, является потенциальным. Найти потенциал этого поля.

§ 7. Запись основных дифференциальных операций векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах

7.1. Криволинейные координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Параметры Ламе.

Если в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ введена система координат q_1, q_2, q_3 посредством формул

$$x = x(q), \quad y = y(q), \quad z = z(q), \quad q = (q_1, q_2, q_3), \quad (1)$$

связывающих декартовы координаты x, y, z точки $M \in \mathbb{R}^3$ с координатами q_1, q_2, q_3 , то ее называют *криволинейной системой координат*. При этом координаты q_i ($i = 1, 2, 3$) называют *криволинейными*.Предположим, что отображение $\Phi = (x(q), y(q), z(q))$, $q \in \mathbb{R}^3$, порожаемое системой равенств (1), является C^1 -диффеоморфизмом $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^3$ (т.е. Φ непрерывно дифференцируемое вместе с отображением Φ^{-1}).**Определение 1.** Криволинейная система координат q_1, q_2, q_3 называется *ортогональной*, если векторы $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q)$ ($i = 1, 2, 3$) взаимно ортогональны:

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q) \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q) \right\rangle = 0. \quad (2)$$

Сферическая и цилиндрическая системы координат в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ являются *ортогональными криволинейными системами*.

Действительно, если $\Phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta)$, $\rho \geq 0$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$, и $\Psi(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$, $\rho \geq 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$, то имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \cos \theta \sin \varphi, -\rho \sin \theta),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, 0),$$

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\rangle = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = (0, 0, 1),$$

$$\left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\rangle = 0.$$

Если система криволинейных координат q_1, q_2, q_3 ортогональна, то векторы $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2, 3$) образуют базис пространства $\mathbb{R}^3$, и базис $\left\{ e_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q); i = 1, 2, 3 \right\}$, где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$, является ортонормированным. Функции H_i называются параметрами Ламе. Базис $\{e_i; i = 1, 2, 3\}$ и параметры Ламе изменяются при переходе от точки к точке.

Если в ортогональной криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3 одна координата фиксирована, то отображение Φ определяет многообразие класса C^1 размерности $p = 2$ — гладкую поверхность, которую будем называть координатной поверхностью. В пространстве $\mathbb{R}^3$ существует три семейства координатных поверхностей. Через каждую фиксированную точку евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ проходит по одной поверхности каждого из трех семейств.

Рассмотрим элементарную ячейку, образованную тремя парами смежных координатных поверхностей, и обозначим dl_1, dl_2, dl_3 длины ребер ячейки. Имеем

$$dl_1 = H_1 dq_1, \quad dl_2 = H_2 dq_2, \quad dl_3 = H_3 dq_3, \quad (3)$$

где H_i ($i = 1, 2, 3$) — параметры Ламе.

Действительно,

$$dl_i = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2} dq_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Вычислим параметры Ламе для случаев перехода от декартовой прямоугольной системы координат к сферической и цилиндрической системам координат.

При переходе к сферической системе координат имеем

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2} = \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta} = 1, \quad (4)$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho, \quad (5)$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = \rho \sin \theta, \quad (6)$$

а при переходе к цилиндрической системе координат получим

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \quad (7)$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi} = \rho, \quad (8)$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1} = 1, \quad (9)$$

Определение 2. Элементом объема dV в криволинейных координатах q_1, q_2, q_3 , соответствующим приращениям dq_i координат q_i ($i = 1, 2, 3$) в точке $q = (q_1, q_2, q_3)$, называется объем параллелепипеда, построенного на векторах $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q) dq_i$.

Согласно этому определению имеем

$$dV(q) = \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q) dq_1, \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q) dq_2, \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q) dq_3 \right)}, \quad (10)$$

где $\Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q) dq_1, \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q) dq_2, \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q) dq_3 \right)$ — определитель Грама от векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q) dq_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Принимая во внимание ортогональность векторов $\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2, 3$), получим

$$\begin{aligned} dV(q) &= \sqrt{\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_1}(q) \right\rangle \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_2}(q) \right\rangle \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_3}(q) \right\rangle} dq_1 dq_2 dq_3 = \\ &= H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя определение 2 и формулы (4)–(11), можно получить известные выражения для элементов объема в сферической и цилиндрической системах координат:

$$dV(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi, \quad dV(\rho, \varphi, z) = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (12)$$

Параметры Ламе называют масштабными множителями. Координатные линии, вдоль каждой из которых изменяется лишь один параметр, можно представить как кривые в пространстве $\mathbb{R}^3$, на которые нанесены шкалы этих параметров. Параметры Ламе H_i на этих кривых преобразуют параметры q_i в длины дуг соответствующих кривых.

7.2. Градиент скалярного поля.

Пусть в области $D' \subset \mathbb{R}^3$ задано дифференцируемое скалярное поле $q \mapsto u(q)$. Компонентами вектора $\text{grad } u(q)$ в базисе $\left\{ e_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q); i = 1, 2, 3 \right\}$ являются его проекции $\frac{\partial u}{\partial e_i}(q) = \langle \text{grad } u(q), e_i \rangle$ на направления, определяемые векторами e_i . Поскольку $\langle \text{grad } u(q), e_i \rangle = \frac{1}{H_i} \left\langle \text{grad } u(q), \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q) \right\rangle = \frac{1}{H_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}(q)$, то справедливо представление

$$\text{grad } u(q) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}(q) e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}(q) e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3}(q) e_3. \quad (1)$$

В частности, в сферической и цилиндрической системах координат вектор-градиент скалярного поля u имеет следующие представления:

$$\text{grad } u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) e_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) e_\varphi, \quad (2)$$

$$\text{grad } u(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \varphi, z) e_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \varphi, z) e_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}(\rho, \varphi, z) e_z, \quad (3)$$

где $\{e_\rho, e_\theta, e_\varphi\}$, $\{e_\rho, e_\varphi, e_z\}$ — ортонормированные базисы, порождаемые отображениями $\Phi'(\rho, \theta, \varphi)$ и $\Psi'(\rho, \varphi, z)$ (см. п.7.1).

7.3. Расходимость и вихрь векторного поля.

Для записи операций расходимости и вихря векторного поля $q \mapsto u(q)$, $q \in D'$, в криволинейных координатах нам понадобятся некоторые вспомогательные вычисления.

Полагая в формуле (1), п.7.2, $u = q_1$, получим

$$\text{grad } q_1 = \frac{1}{H_1} e_1. \quad (1)$$

Взяв операцию вихря от обеих частей равенства (1) и принимая во внимание, что $\text{rot grad } q_1 = 0$, имеем

$$\text{rot } \frac{1}{H_1} e_1 = \left[\nabla, \frac{e_1}{H_1} \right] = \frac{1}{H_1} [\nabla, e_1] - \left[e_1, \nabla \frac{1}{H_1} \right] = \frac{1}{H_1} \text{rot } e_1 + \left[\text{grad } \frac{1}{H_1}, e_1 \right] = 0. \quad (2)$$

Согласно формуле (1), п.7.2, находим

$$\begin{aligned} \text{grad } \frac{1}{H_1} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1} \right) e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{H_1} \right) e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{1}{H_1} \right) e_3 = \\ &= -\frac{1}{H_1^2} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_3 \right) = -\frac{1}{H_1^2} \text{grad } H_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, равенство (2) принимает вид

$$\frac{1}{H_1} \text{rot } e_1 - \frac{1}{H_1^2} [\text{grad } H_1, e_1] = 0. \quad (4)$$

Следовательно, $\text{rot } e_1 = \frac{1}{H_1} [\text{grad } H_1, e_1]$. Поскольку $[\text{grad } H_1, e_1] = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_3$, то

$$\text{rot } e_1 = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_3. \quad (5)$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\text{rot } e_2 = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} e_3 - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} e_1, \quad (6)$$

$$\text{rot } e_3 = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} e_1 - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} e_2. \quad (7)$$

Вычислим теперь расходимости векторов e_1, e_2, e_3 посредством формулы $\text{div } [u_1, u_2] = \langle \nabla, [u_1, u_2] \rangle = \langle u_2, \text{rot } u_1 \rangle - \langle u_1, \text{rot } u_2 \rangle$, полученной при решении примера 219. Приняв во внимание, что $e_1 = [e_2, e_3]$, $e_2 = [e_3, e_1]$, $e_3 = [e_1, e_2]$, имеем:

$$\text{div } e_1 = \langle e_3, \text{rot } e_2 \rangle - \langle e_2, \text{rot } e_3 \rangle = \frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1}, \quad (8)$$

$$\text{div } e_2 = \langle e_1, \text{rot } e_3 \rangle - \langle e_3, \text{rot } e_1 \rangle = \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}, \quad (9)$$

$$\text{div } e_3 = \langle e_2, \text{rot } e_1 \rangle - \langle e_1, \text{rot } e_2 \rangle = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3}. \quad (10)$$

Если $u = (u_1, u_2, u_3)$, то, в силу линейности операции вычисления расходимости, получим

$$\begin{aligned} \text{div } u &= \text{div } (u_1 e_1) + \text{div } (u_2 e_2) + \text{div } (u_3 e_3) = \langle \nabla, u_1 e_1 \rangle + \langle \nabla, u_2 e_2 \rangle + \langle \nabla, u_3 e_3 \rangle = \\ &= u_1 \text{div } e_1 + u_2 \text{div } e_2 + u_3 \text{div } e_3 + \langle e_1, \text{grad } u_1 \rangle + \langle e_2, \text{grad } u_2 \rangle + \langle e_3, \text{grad } u_3 \rangle = \\ &= \frac{u_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{u_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} + \frac{u_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \\ &\quad + \frac{u_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} + \frac{u_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial q_3} = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (u_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (u_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (u_3 H_1 H_2) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Если в формуле (11) взять $u = \text{grad } v$, то получим следующее выражение для оператора Лапласа в криволинейных ортогональных координатах:

$$\Delta v = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial v}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial v}{\partial q_3} \right) \right). \quad (12)$$

Для вычисления вихря векторного поля u воспользуемся линейностью этой операции, формулами (5)–(7), примером 216 и формулой (1), п. 7.2:

$$\begin{aligned} \text{rot } u &= \text{rot}(u_1 e_1) + \text{rot}(u_2 e_2) + \text{rot}(u_3 e_3) = \\ &= u_1 \text{rot } e_1 + u_2 \text{rot } e_2 + u_3 \text{rot } e_3 + [\text{grad } u_1, e_1] + [\text{grad } u_2, e_2] + [\text{grad } u_3, e_3] = \\ &= \frac{u_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{u_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} e_3 + \frac{u_2}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} e_3 - \frac{u_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} e_1 + \\ &\quad + \frac{u_3}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} e_1 - \frac{u_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_1}{\partial q_3} e_2 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} e_3 + \\ &\quad + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial q_1} e_3 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_2}{\partial q_3} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial q_2} e_1 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_3}{\partial q_1} e_2 = \\ &= \frac{1}{H_3 H_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 u_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 u_2) \right) e_1 + \frac{1}{H_3 H_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 u_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 u_3) \right) e_2 + \\ &\quad + \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 u_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 u_1) \right) e_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение (11) можно рассматривать как результат применения формулы Остроградского к параллелепипеду K , стороны которого равны смещениям вдоль координатных линий, соответствующих приращениям dq_i ($i = 1, 2, 3$), а выражение (13) — как результат применения теоремы Стокса к трем парам граней того же параллелепипеда:

$$\text{div } u(q) = \lim_{K \rightarrow q} \frac{1}{\mu K} \iint_S \langle n, u \rangle dS, \quad \langle \text{rot } u, n \rangle = \lim_{S \rightarrow q} \frac{1}{\mu S} \oint_L \langle \tau, u \rangle dl,$$

где $\mu K = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$ — объем параллелепипеда, S — его граница, n — вектор внешней единичной нормали к поверхности S , μS — площадь поверхности S , L — объединение контуров, ограничивающих грани параллелепипеда, τ — единичный касательный к L вектор. При этом следует принять во внимание, что векторы внешней единичной нормали n на гранях параллелепипеда K и векторы τ , касательные к кривой L , совпадают с векторами базиса $\{e_i; i = 1, 2, 3\}$ или противоположны им.

Для вычисления расходимости и вихря векторного поля $u = (u_1, u_2, u_3)$ в сферической и цилиндрической системах координат воспользуемся формулами (4)–(9), п. 7.1, и формулами (11), (13) этого пункта. Имеем

$$\text{div } u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_1) + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_2 \sin \theta) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi}, \quad (14)$$

$$\text{div } u(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_1) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } u(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (u_3 \sin \theta) - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right) e_\rho + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_3) \right) e_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) e_\varphi, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{rot } u(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) e_\rho + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial \rho} \right) e_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) e_z. \quad (17)$$

Если $(\rho, \theta, \varphi) \mapsto u(\rho, \theta, \varphi)$ и $(\rho, \varphi, z) \mapsto v(\rho, \varphi, z)$ — дважды дифференцируемые скалярные поля, то, применив формулу (12) этого пункта и используя формулы (4)–(9), п. 7.1.

получим запись оператора Лапласа в сферических и цилиндрических координатах:

$$\Delta u = \langle \nabla, \nabla u \rangle = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (18)$$

$$\Delta v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (19)$$

234. Вычислить $\text{grad } u$, где $u(\rho, \theta, \varphi) = 3\rho^2 \sin \theta + e^\rho \cos \varphi - \rho$.

◀ Применим формулу (2), п.7.2. Получим

$$\text{grad } u(\rho, \theta, \varphi) = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = \left(6\rho \sin \theta + e^\rho \cos \varphi - 1, 3\rho \cos \theta, -\frac{e^\rho \sin \varphi}{\rho \sin \theta} \right). \blacktriangleright$$

235. Вычислить $\text{grad } u$, где $u(\rho, \varphi, z) = \rho^2 + 2\rho \cos \varphi - e^z \sin \varphi$.

◀ Согласно формуле (3), п.7.2, имеем

$$\text{grad } u(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(2(\rho + \cos \varphi), -\left(2 \sin \varphi + \frac{e^z \cos \varphi}{\rho} \right), e^z \sin \varphi \right). \blacktriangleright$$

236. Вычислить $\text{div } u$, если $u = (u_1, u_2, u_3) = \left(\rho^2, -2 \cos^2 \varphi, \frac{\varphi}{\rho^2 + 1} \right)$.

◀ Применив формулу (14), получим

$$\begin{aligned} \text{div } u(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_1) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_2 \sin \theta) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^4) - \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (2 \cos^2 \varphi \sin \theta) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\varphi}{\rho^2 + 1} \right) = \\ &= 4\rho - \frac{2}{\rho} \cos^2 \varphi \cotg \theta + \frac{1}{\rho(\rho^2 + 1) \sin \theta}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

237. Вычислить $\text{div } u$, где $u = (u_1, u_2, u_3) = (\varphi \arctg \rho, 2, -z^2 e^z)$.

◀ Согласно формуле (15), имеем

$$\begin{aligned} \text{div } u(\rho, \varphi, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_1) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \varphi \arctg \rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (2) - \frac{\partial}{\partial z} (z^2 e^z) = \\ &= \frac{\varphi}{\rho} \left(\arctg \rho + \frac{\rho}{1 + \rho^2} \right) + 2ze^z + z^2 e^z. \blacktriangleright \end{aligned}$$

238. Найти $\text{rot } u$, если $u = (u_1, u_2, u_3) = (\rho^2, 2 \cos \theta, -\varphi)$.

◀ Применим формулу (16). Получим

$$\begin{aligned} \text{rot } u(\rho, \theta, \varphi) &= \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (u_3 \sin \theta) - \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \right), \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_3), \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) = \\ &= \left(-\frac{\varphi}{\rho} \cotg \theta, \frac{\varphi}{\rho}, \frac{2 \cos \theta}{\rho} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

239. Вычислить $\text{rot } u$, где $u = (u_1, u_2, u_3) = \left(\cos \varphi, -\frac{\sin \varphi}{\rho}, \rho^2 \right)$.

◀ Согласно формуле (17), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{u}(\rho, \varphi, z) &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho^2) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin \varphi}{\rho} \right), \frac{\partial}{\partial z} (\cos \varphi) - \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2), \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (-\cos \varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi) \right) = \\ &= \left(0, -2\rho, \frac{\sin \varphi}{\rho} \right). \blacktriangleright \end{aligned}$$

240. Доказать, что векторное поле $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{2 \cos \theta}{\rho^3}, \frac{\sin \theta}{\rho^3}, 0 \right)$ потенциальное.

◀ Поскольку класс потенциальных векторных полей совпадает с классом безвихревых полей, то достаточно показать, что $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$. Применив формулу (16), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{u}(\rho, \theta, \varphi) &= \\ &= \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (0 \cdot \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\sin \theta}{\rho^3} \right) \right), \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{2 \cos \theta}{\rho^3} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (0 \cdot \rho), \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\sin \theta}{\rho^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2 \cos \theta}{\rho^3} \right) \right) = \\ &= \left(0, 0, -\frac{2 \sin \theta}{\rho^4} + \frac{2 \sin \theta}{\rho^4} \right) = (0, 0, 0). \blacktriangleright \end{aligned}$$

241. Найти поток векторного поля $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (\rho^2 \theta, \rho e^{2\theta}, 0)$ через внешнюю сторону верхней полусферы S радиуса R с центром в начале координат.

◀ Пусть σ — часть координатной поверхности $q_1 = C$, где $C = \text{const}$, ограниченная координатными линиями

$$q_1 = \alpha_1, q_2 = \alpha_2 \ (\alpha_1 < \alpha_2); \quad q_3 = \beta_1, q_3 = \beta_2 \ (\beta_1 < \beta_2).$$

Тогда поток вектора $\mathbf{u}(q_1, q_2, q_3) = (u_1(q_1, q_2, q_3), u_2(q_1, q_2, q_3), u_3(q_1, q_2, q_3))$ через поверхность σ в направлении вектора $\mathbf{e}_1$ вычисляется по формуле

$$w(\sigma; \mathbf{u}) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} u_1(C, q_2, q_3) H_2(C, q_2, q_3) H_3(C, q_2, q_3) dq_2 dq_3. \quad (20)$$

Полусфера S является частью координатной поверхности $\rho = \text{const}$, т.е. $\rho = R$. На поверхности S имеем

$$q_1 = \rho = R, \quad q_2 = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad q_3 = \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Принимая во внимание, что в сферических координатах

$$H_1 = H_\rho = 1, \quad H_2 = H_\theta = \rho, \quad H_3 = H_\varphi = \rho \sin \theta,$$

по формуле (20) получаем

$$w(S; \mathbf{u}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} R^4 \theta \sin \theta d\varphi = 2\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta d\theta = 2\pi R^4. \blacktriangleright$$

242. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (\rho, z, 0)$ через замкнутую поверхность S , образованную плоскостями, уравнения которых $z = 0$, $z = 1$, и цилиндром, уравнение которого $\rho = 1$.

◀ Воспользуемся формулой Остроградского

$$w(S; \mathbf{u}) = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV.$$

Согласно формуле (15), имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 2.$$

Таким образом,

$$w(S; \mathbf{u}) = 2 \iiint_V dV = 2|V| = 2\pi,$$

поскольку объем цилиндра равен π . ►

Упражнения для самостоятельной работы

172. Найти градиенты скалярных полей:

а) $u = \rho \cos \varphi + z \sin^2 \varphi - 3\rho$; б) $u = \rho^2 \cos \theta$; в) $u = C \frac{\cos \theta}{\rho^2}$, $C = \text{const}$.

173. Вычислить расходимости векторных полей $\mathbf{u}$:

а) $\mathbf{u} = (\rho, z \sin \varphi, e^\varphi \cos z)$; б) $\mathbf{u} = \left(\frac{2 \cos \theta}{\rho^3}, \frac{\sin \theta}{\rho^3}, 0 \right)$.

174. Вычислить роторы векторных полей:

а) $\mathbf{u} = (2\rho + \alpha \cos \varphi, -\alpha \sin \theta, \rho \cos \theta)$, $\alpha = \text{const}$; б) $\mathbf{u} = \left(\sin \varphi, \frac{\cos \varphi}{\rho}, -\rho z \right)$.

175. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{u}$ через заданную поверхность S , если $\mathbf{u} = (\rho, -\cos \varphi, z)$, S — замкнутая поверхность, образованная цилиндром, уравнение которого $\rho = 2$, и плоскостями, уравнения которых $z = 0$, $z = 2$.

Ответы

Глава 1

2. Непрерывна. 3. Непрерывна. 4. Непрерывна при $y \neq 0$. 5. 1. 6. 0. 7. $\frac{1}{e} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$.
 8. 0. 14. Непрерывно дифференцируема. 15. Непрерывно дифференцируема при $y \neq 0$.
 18. Равномерно. 19. Равномерно. 20. Равномерно. 21. Равномерно. 22. Неравномерно.
 23. Неравномерно. 24. Неравномерно. 25. Неравномерно. 26. 1. 27. $\frac{\pi}{2}$. 28. 0. 31. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+\alpha} dx$.
 32. $\frac{\pi}{3} |\alpha|^3$. 33. $\frac{\pi a}{2} - \frac{\pi a^2}{8}$ при $0 \leq a < 2$; $\frac{\pi}{2}$ при $a \geq 2$. 34. $\frac{\pi}{4}$. 35. $\frac{\pi}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}}$. 36. $\pi \left(e^{-|a|} - \frac{1}{2} \right)$.
 37. $\frac{1}{2} \ln(1+a^2)$. 38. $\sqrt{\pi} \frac{d}{da} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{a\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \right)$. 39. $\frac{d}{da}(\Gamma(a+1))$. 40. $\frac{1}{|a|} \int_0^b e^{-\frac{b_2^2}{|a|}} db_2 \int_0^{b_2} e^{-\frac{b_1^2}{|a|}} db_1$.
 41. $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a}$. 42. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 43. 0. 44. 0. 47. $\frac{\sqrt{3}}{60\pi} \Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)$. 48. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 49. $\frac{\pi}{5 \sin \frac{2\pi}{5}}$.
 50. $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(k+2)3^k(k+1)!(k+6)!}{(2k+8)!}$. 51. $\frac{45}{256}$. 55. $\frac{\sin \lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos \lambda}{\lambda}$. 56. $\frac{\lambda}{\lambda^2-1}(1+\cos \lambda \pi)$. 57. $\frac{\sin 2\pi \lambda}{\lambda^2-1}$.
 58. $\frac{\sin \lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos \lambda}{\lambda} + \frac{\sin 2\lambda + \lambda \cos 2\lambda}{e^2(1+\lambda^2)}$. 59. $\frac{\sin \lambda \pi}{\lambda}$. 60. $\frac{\sin \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda - 1}{\lambda^2} + \frac{\cos \lambda - \lambda \sin \lambda}{e(1+\lambda^2)}$. 61. $\frac{\cos \lambda \frac{\pi}{2} - 1}{\lambda^2}$.
 62. $i\lambda \bar{f}(\lambda); -\lambda^2 \bar{f}(\lambda)$. 63. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\lambda) e^{i\lambda x}}{1+3i\lambda-\lambda^2} d\lambda$.

Глава 2

1. 9,88. Точное значение $2\pi(7-\sqrt{24})$. 2. $\delta < 0,00022$. 5. Отрицательный. 6. $\int_{-1}^0 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$.
 7. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy$. 8. $\int_0^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx$.
 9. $\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx$.
 10. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^a f(u \cos v, u \sin v) u du$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_a^b f(u \cos v, \sin v) u du$. 11. $\int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int_0^{\frac{a}{1-v}} f(u-uv, uv) u du$.
 12. $\frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{b}{a\alpha+b}} dv \int_0^{\frac{a\alpha}{1-v}} u f\left((1-v)\frac{u}{\alpha}, uv\right) du + \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{b}{a\alpha+b}}^{\frac{b}{a\alpha+b}} dv \int_0^{\frac{b}{a\alpha+b}} u f\left((1-v)\frac{u}{\alpha}, uv\right) du$.
 13. $3 \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho \cos^3 \varphi, \rho \sin^3 \varphi) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi$. 14. $y = uv, x = v$. 15. а) Перейти к поляр-
 ным координатам; б) положить $x^2 = u, y^2 = v$. 16. $\frac{1}{3}$. 17. $\frac{p^5}{21}$. 18. $(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}) a^{\frac{3}{2}}$. 19. $14a^4$.
 20. $\frac{35}{12} \pi a^4$. 21. $-6\pi^2$. 22. $\frac{\pi}{2}$. 23. $\frac{1}{364}$. 24. $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$. 25. $\frac{\pi}{6}$. 26. $\frac{\pi}{10}$. 27. 0, если одно из чисел
 m, n, p нечетное; $\frac{4\pi}{m+n+p+3} \frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, если m, n, p четные. 28. $\frac{\pi}{3}$. 29. $\frac{m(3m+1)}{12}$.

30. $\frac{a^m}{m!}$. 31. $\frac{2}{(m-1)!(2m+1)}$. 33. $U = \frac{16}{15}\pi^2\mu_0 r^5$. 34. Сходится при $p < 1$. 35. Сходится при $p < 1$. 36. Сходится при $p < 1$. 37. Сходится при $p < 1$. 38. $\frac{1}{(p-q)(q-1)}$, $p > q > 1$. 39. $\frac{\pi}{p-1}$, $p > 1$. 40. $\frac{1}{2}$. 41. $\frac{\pi}{2}$. 42. $\frac{\pi ab}{e}$. 43. $-\frac{\pi \epsilon a^2 b^2}{2(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. 44. $\frac{\pi}{2}$. 45. $2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1-p\right)$, $p < 1$. 46. $\pi^{\frac{3}{2}}$.
47. $\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}$, где $\Delta = \det(a_{ij})$. 50. $\frac{3a^2}{16}(4\pi - 1 - 3\sqrt{3})$. 51. $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$. 52. $\frac{\pi a^2}{2}$. 53. $\frac{\pi ab}{\sqrt{2}}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 54. $\frac{ab}{12}$. 55. $\frac{a^5 b}{10h^4}$. 56. $\frac{21\pi ab}{256}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 57. $\frac{ab}{42}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 58. $\frac{2}{3}(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3})$. 59. $\frac{1}{3}(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{m} - \sqrt{n})p$, где $p = a + b + m + n + \sqrt{ab} + \sqrt{mn}$. 60. $\frac{\pi a^2}{4}$. 61. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1 + \sqrt{2})$. 62. $\frac{1}{1260} \frac{(ab)^5}{c^8}$. 63. $\frac{(\beta - \alpha)(b^2 - a^2)}{2(\alpha + 1)(\beta + 1)}$. 64. $\frac{65ab}{108}$. 65. πab^2 . 66. $\frac{\pi a^2 c}{2}$. 67. $\frac{\pi}{32}$. 68. 2π . 69. $\frac{4a^3}{9\sqrt{a}}$.
70. $\frac{3\pi}{8}(a + b)$. 71. $\pi abc \frac{k}{k+1}$. 72. $\frac{\pi}{12} \left(\frac{ab}{c}\right)^3$. 73. $\frac{8}{35}$. 74. $\left(\frac{\pi}{8} - \frac{4}{15}\right) abc$. 75. $\frac{am}{192}(a + m)(3a^2 - 5am + 3m^2)$. 76. $\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2} - 1)$. 77. $8a^2$. 78. $\frac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$. 79. $2a^2$. 80. $\frac{\pi}{6}(3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10}))$. 81. $\frac{abc}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1} \left(\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{c^3}\right)$. 82. $\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2} - 1) \arctg \sqrt{\frac{\pi}{b}}$. 83. $\frac{5}{9}ab$. 84. $\frac{\pi a^3}{8}$.
85. $\frac{2}{3}\pi a^3$. 86. $\frac{4\pi abc^7}{21h^6}$. 87. $2\pi^2(1 - \alpha^2)abc$. 88. $\frac{abch}{60} \frac{5c+4h}{(c+h)^2}$. 89. $\frac{2\pi h}{\Delta}$. 90. $\frac{1}{2}$. 91. $\frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)$. 92. $\frac{\pi^2}{4}abc$. 93. $\frac{8}{5}\pi abc$. 94. $\frac{abc}{60} \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k}\right) \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)$. 95. $\frac{abc}{554400}$. 96. $\frac{abc}{3}$. 97. $\frac{abc}{1680}$. 98. $\frac{4}{3}\pi a^3$.
99. $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}; \frac{1}{4}\right)$. 100. $\left(\frac{3\pi a}{64}, \frac{3\pi b}{64}\right)$. 101. $\left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right)$. 102. $\left(\frac{a^2 b}{14c^2}, \frac{ab^2}{14c^2}\right)$. 103. $\left(\frac{\pi a}{8}, \frac{\pi a}{8}\right)$. 104. $I_x = \frac{bh^3}{12}$, $I_y = \frac{h|b_1^3 - b_2^3|}{12}$, $b = |b_1 - b_2|$. 105. $I_x = \frac{21}{32}\pi a^4$, $I_y = \frac{49}{32}\pi a^4$. 106. $I_x = I_y = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. 107. $I_x = I_y = \frac{9a^4}{8}$. 108. $I_\alpha = \frac{a^4}{32\sqrt{3}}$. 109. $(0, 0, \frac{3h}{4})$. 110. $\left(\frac{9\pi a}{8(3\pi-4)}, 0, 0\right)$. 111. $(0, 0, \frac{7c}{30})$. 112. $(0, 0, \frac{3a}{8})$. 113. $(1, 1, \frac{5}{3})$. 114. $I_{xy} = \frac{\pi}{5}abc^3$, $I_{yz} = \frac{\pi}{20}a^3bc$, $I_{zx} = \frac{\pi}{20}ab^3c$. 115. $I_{xy} = \frac{2}{225}abc^3(15\pi - 16)$, $I_{yz} = \frac{2}{1575}a^3bc(105\pi - 92)$, $I_{zx} = \frac{2}{1575}ab^3c(105\pi - 272)$. 116. $I_{xy} = \frac{7}{2}\pi abc^3$, $I_{yz} = \frac{4}{3}\pi a^3bc$, $I_{zx} = \frac{4}{3}\pi ab^3c$. 117. $u = \pi\mu_0 \left(a^2 \ln \left| \frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{\sqrt{a^2+z^2}-z} \right| + (h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2} + z\sqrt{a^2+z^2} - ((h-z)|h-z| + |z|z) \right)$. 118. $F = (0, 0, -\pi k \mu_0 r \sin^2 \alpha)$. 119. $\sqrt{5} \ln 2$. 120. $\frac{2^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$.
121. $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$. 122. $\frac{2\sqrt{2}}{3} \left((1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$. 123. $\frac{1}{3} \left((x_2^2+1)^{\frac{3}{2}} - (x_1^2+1)^{\frac{3}{2}} \right)$. 124. $(1+e^{-t})\sqrt{3}$. 125. $\frac{8}{15}k\sqrt{2} \left((3\pi^2-1)(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}} + 1 \right)$. 126. $\frac{98}{81}p^2$. 127. 3. 128. $\frac{3}{16}\pi a\sqrt{a}$. 129. 13. 132. $u = \ln|x-y| + \frac{y}{x-y} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + C$. 133. $u = \frac{2x}{x-y} + C$. 134. $2\pi \arctg \frac{H}{R}$. 135. $\frac{2\pi a}{c(n-2)} \left(\frac{1}{(c-a)^{n-2}} - \frac{1}{(c+a)^{n-2}} \right)$, $n \neq 2$. 136. $R^2 H \left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8} \right)$. 137. $\frac{\pi}{8}$. 138. 0. 139. $\frac{\pi a^4}{2}$. 140. $-2\pi ab$. 141. 0. 142. $\frac{\partial}{\partial x}(xF(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(yF(x, y))$. 143. $\operatorname{sgn}(ad - bc)$. 144. $\sum \operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$, где сумма распространяется на все точки пересечения кривых, определяемых уравнениями $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, лежащие внутри контура γ . 145. $\frac{a^2}{2}B(2m+1, 2n+1)$. 147. $3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$. 148. $2 \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. 149. $\iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz$. 150. $3a^4$. 151. $\frac{2a^3}{9}$.
153. $-\frac{\pi R^6}{8}$. 154. $-\pi a^2\sqrt{3}$. 155. $\frac{h^3}{3}$. 156. 0. 157. $-\frac{9a^3}{2}$. 158. $\varphi = \pi$. 159. $\frac{\partial u}{\partial \epsilon} = -\frac{\cos(\widehat{e, r})}{r^2}$; $\frac{\partial u}{\partial \epsilon} = 0$, если $e \perp r$. 160. $\frac{\partial u}{\partial \epsilon} = \frac{(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)}{|\operatorname{grad} v|}$; $\frac{\partial u}{\partial \epsilon} = 0$, если $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$. 161. 0. 162. $\frac{f'(r)}{r}(c, r)$. 163. $3f(r) + rf'(r)$; $f(r) = \frac{C}{r^3}$, $C = \operatorname{const}$. 164. $\frac{3\pi}{16}$. 165. $\frac{1}{6}$. 167. $\operatorname{rot} u(M) = -\frac{5}{4}i - j + \frac{5}{2}k$, $|\operatorname{rot} u(M)| = \frac{1}{4}\sqrt{141}$. 168. 0. 170. $\frac{33}{2}$. 171. $u(x, y, z) = \int_r^{\infty} t f(t) dt$.

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 172. а) $\left(\cos \varphi - 3^{\rho} \ln 3, \frac{z}{\rho} \sin 2\varphi - \sin \varphi, \sin^2 \varphi \right)$; б) $(2\rho \cos \theta, -\rho \sin \theta, 0)$;
 в) $\left(-C \frac{2 \cos \theta}{\rho^3}, -C \frac{\sin \theta}{\rho^3}, 0 \right)$. 173. а) $2 + \frac{z}{\rho} \cos \varphi - e^{\varphi} \sin z$; б) 0. 174. а) $\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}, -\left(2 \cos \theta + \frac{\alpha \sin \varphi}{\rho \sin \theta} \right), -\frac{\alpha \sin \theta}{\rho} \right)$; б) $\left(0, z, -\frac{\cos \varphi}{\rho} \right)$. 175. 24π .

Оглавление

Глава 1. Интегралы, зависящие от параметра	3
§1. Собственные интегралы, зависящие от параметра	3
§2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость интегралов	15
§3. Дифференцирование и интегрирование несобственных интегралов под знаком интеграла	34
§4. Эйлеровы интегралы	51
§5. Интегральная формула Фурье	60
Глава 2. Кратные и криволинейные интегралы	68
§1. Интеграл Римана на компакте. Приведение кратных интегралов к повторным и их вычисление	68
§2. Несобственные кратные интегралы	99
§3. Приложение кратных интегралов к решению задач геометрии и физики	112
§4. Интегрирование на многообразиях	148
§5. Формулы Остроградского, Грина и Стокса	184
§6. Элементы векторного анализа	201
§7. Запись основных дифференциальных операций векторного анализа в ортогональных криволинейных координатах	214
Ответы	222

Издательство УРСС предлагает Вам свои лучшие книги:

Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели. (Гуманитариям о математике).

Киселев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И. и др. Вся высшая математика. Т. 1–6.

Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Векторный анализ.

Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения.

Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости.

Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление.

Боровков А.А. Теория вероятностей.

Боровков А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов.

Шикин Е.В. От игр к играм.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 7-е изд., исправл.

Гнеденко Б.В. Очерк по истории теории вероятностей.

Гнеденко Б.В. О математике.

Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам.

Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И., Подивилов Е.В., Черных А.И., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Задачи по математическим методам физики.

Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.

Арнольд В.И. Математические методы классической механики.

Квасников И.А. Молекулярная физика.

Жукарев А.С., Матвеев А.Н., Петерсон В.К. Задачи повышенной сложности в курсе общей физики.

**Ляшко Иван Иванович, Боярчук Алексей Климентьевич,
Гай Яков Гаврилович, Головач Григорий Петрович**

Справочное пособие по высшей математике. Т. 3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы. — М.: Едиториал УРСС, 2001. — 224 с.

ISBN 5-354-00019-X

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 3 по содержанию соответствует второй половине второго тома «Справочного пособия по математическому анализу». В нем рассматриваются интегралы, зависящие от параметра, кратные и криволинейные интегралы, а также элементы векторного анализа.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.