А.К.Боярчук, Г.П.Головач

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Справочное пособие по высшей математике. Т. 5

М.: Эдиториал УРСС, 2001. - 384 с.

«Справочное пособие по высшей математике» выходит в пяти томах и представляет собой новое, исправленное и существенно дополненное издание «Справочного пособия по математическому анализу» тех же авторов. В новом издании пособие охватывает три крупных раздела курса высшей математики — математический анализ, теорию дифференциальных уравнений, теорию функций комплексной переменной.

Том 5 охватывает все разделы учебных программ по дифференциальным уравнениям для университетов и технических вузов с углубленным изучением математики. Наряду с минимальными теоретическими сведениями в нем содержится более семисот детально разобранных примеров. Среди вопросов, нестандартных для такого рода пособий, следует отметить примеры по теории продолжимости решения задачи Коши, нелинейным уравнениям в частных производных первого порядка, некоторым численным методам решения дифференциальных уравнений.

Пособие предназначено для студентов, преподавателей и работников физико-математических, экономических и инженерно-технических специальностей, специалистов по прикладной математике, а также лиц, самостоятельно изучающих высшую математику.

Оглавление

Предметный указатель

Настоящий предметный указатель призван облегчить поиск терминов по алфавитному признаку. Для поиска терминов по тематическому признаку пользуйтесь подробно составленным оглавлением.

В указателе, как правило, приводятся ссылки только на страницу, содержащую определение термина; составитель указателя не ставил своей целью отследить все упоминания приведенных терминов в тексте. Исключение составляют термины, описывающие методы, приемы, практические результаты: для них в некоторых случаях после номеров страниц курсивом указаны также задачи, в которых они используются существенным образом.

С целью уменьшения громоздкости указателя вместо термина "дифференциальное(ые) уравнение(я)" применяется сокращение "д. у.".

Предисловие

Предлагаемая вниманию читателей книга по замыслу авторов призвана способствовать глубокому усвоению теории обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью подробно решенных нетривиальных примеров и задач.

Своеобразие предмета теории дифференциальных уравнений — его обширность и тесная связь с теорией пределов, теорией функций, дифференциальным и интегральным исчислениями, теорией рядов и другими разделами математики — определяет соответствующую специфику ее метода. Суть этой специфики состоит в том, что метод теории дифференциальных уравнений есть метод математического анализа. В связи с этим теорию дифференциальных уравнений не без оснований считают дальнейшим обобщением и развитием математического анализа на класс неявных функций, заданных уравнениями, содержащими независимую переменную, функцию и ее производные. Так, интегральное исчисление функции одной переменной фактически есть теория интегрирования в элементарных функциях простейшего класса дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$.

Пособие охватывает все разделы учебных программ по дифференциальным уравнениям для университетов и технических вузов с углубленным изучением математики.

Каждый параграф книги снабжен необходимым минимумом теоретических сведений, используемых при решении соответствующих примеров. Кроме того, в книге разобраны нетрадиционные для такого рода пособий примеры по теории продолжимости решения задачи Коши, нелинейным уравнениям в частных производных первого порядка, некоторым численным методам решения дифференциальных уравнений, на применение признаков существования предельных циклов на фазовой плоскости. Каждая глава снабжена упражнениями для самостоятельной работы.

Книга содержит порядка семисот подробно решенных примеров и задач, взятых из следующих учебников и сборников задач по дифференциальным уравнениям:

Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1950;

Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1961;

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1998;

Гудименко Ф. С., Павлюк І. А., Волкова В. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. К., 1972;

Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике, т. II, 1958;

Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 1973;

Гречко Л. Г., Сугаков В. И., Томасевич О. Ф., Федорченко А. М. Сборник задач по теоретической физике. М., 1972;

Мартыненко В. С. Операционное исчисление. К., 1968;

Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1978;

Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г., Калайда О. Ф. Диференциальні рівняння. К., 1981;

Головач Г. П., Калайда О. Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. К., 1997.

Введение

Основные понятия. Составление дифференциальных уравнений

1. Основные определения.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F\left(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

где F — известная функция, заданная в некоторой области D координатного пространства переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$, $x \in (x_0, x_1)$ — аргумент, $y, y', \ldots, y^{(n)}$ — неизвестная функция и ее производные, n — порядок уравнения.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать любую функцию $y = f(x)$, $x \in (x_0, x_1)$, которая:
а) имеет n производных на интервале (x_0, x_1), причем

$$\forall x \in (x_0, x_1) \quad \left(x,\, f(x),\, f'(x),\, \ldots,\, f^{(n)}(x)\right) \in D;$$

б) удовлетворяет уравнению (1), т. е. обращает его в тождество

$$F\left(x,\, f(x),\, f'(x),\, \ldots,\, f^{(n)}(x)\right) \equiv 0 \quad \forall x \in (x_0, x_1).$$

Уравнение (1) называется *проинтегрированным*, если найдены все его решения.

Уравнение (1), разрешенное относительно старшей производной $y^{(n)}$, называется *каноническим* и имеет вид

$$y^{(n)} = \varphi\left(x,\, y,\, y',\, \ldots,\, y^{(n-1)}\right). \tag{2}$$

2. Задача Коши.

Пусть функция $\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна в области D координатного пространства переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Требуется найти интервал X, содержащий точку x_0, и такую n-кратно непрерывно дифференцируемую функцию $y = f(x)$, что $\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)\right) \in D$, когда $x \in X$, и выполняются условия:

$$1) \quad \forall x \in X \quad f^{(n)}(x) \equiv \varphi\left(x,\, f(x),\, f'(x),\, \ldots,\, f^{(n-1)}(x)\right);$$

$$2) \quad f(x_0) = y_0, \quad f'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right) \in D$.

Формально *задача Коши* для уравнения (2) записывается в виде

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n)} = \varphi(x, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{array}\right\} \tag{3}$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

Каждое конкретное решение задачи (3) называется ***частным решением задачи Коши***. Множество частных решений, зависящее от параметров $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, называется ***общим решением задачи Коши***.

3. Построение дифференциального уравнения по заданному семейству кривых.

Для того чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые заданного семейства

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \tag{4}$$

где C_i $(i = \overline{1, n})$ — произвольные постоянные, принадлежащие некоторой области C, следует:

1) n раз продифференцировать равенство (4), считая y n раз непрерывно дифференцируемой функцией переменной x, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\, y' = 0, \quad \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\,\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\, y' + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\, y'^2 + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\, y'' = 0, \quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^n\Phi}{\partial x^n} + \ldots + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\, y^{(n)} = 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

2) Из соотношений (4) и (5) исключить произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Составить дифференциальные уравнения данных семейств линий.

1. $x^2 + Cy^2 - 2y = 0$.

◄ Пусть $y = y(x)$ — непрерывно дифференцируемое решение данного уравнения, где C — параметр, не зависящий от x. Тогда должно выполняться тождество

$$F(x, C) = x^2 + Cy^2(x) - 2y(x) \equiv 0, \tag{1}$$

где $x \in X \subset \mathbb{R}$, X — некоторое множество. Функция F дифференцируема по x. Взяв производную, имеем

$$\frac{\partial F(x, C)}{\partial x} \equiv 2x + 2y(x)y'(x)C - 2y'(x) \equiv 0,$$

откуда

$$C = \frac{y' - x}{yy'} \quad (yy' \neq 0). \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим дифференциальное уравнение

$$(x^2 - y)y' - xy = 0. \text{ ►}$$

2. $Cy - \sin Cx = 0$.

◄ Аналогично проделанному выше получим тождество

$$Cy'(x) - C\cos Cx \equiv 0.$$

При $C = 0$ семейство кривых, для которых составляется дифференциальное уравнение, не определено, поэтому $C \neq 0$. Из системы уравнений

$$y'^2 = \cos^2 Cx, \quad C^2y^2 = \sin^2 Cx \tag{1}$$

находим

$$C^2 = \frac{1 - y'^2}{y^2}, \quad y \neq 0. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), имеем

$$1 - y'^2 = \sin^2\left(\sqrt{\frac{1 - y'^2}{y^2}}\, x\right), \quad \text{или} \quad y' = \cos\left(\frac{x\sqrt{1 - y'^2}}{y}\right). \text{ ►}$$

3. $(x - C_1)^2 + C_2y^2 = 1$.

◄ Дважды дифференцируя по x тождество $(x - C_1)^2 + C_2y^2(x) - 1 \equiv 0$, получим:

$$2(x - C_1) + 2C_2y(x)y'(x) \equiv 0, \quad 1 + \left((y'(x))^2 + y(x)y''(x)\right)C_2 \equiv 0.$$

Исключив из трех тождеств постоянные C_1 и C_2, имеем

$$y^3y'' + \left(y'^2 + yy''\right)^2 = 0. \text{ ►}$$

4. $y = e^{Cx}$.

◀ После дифференцирования по переменной x получим $y'(x) = Ce^{Cx}$, откуда $C = \frac{y'}{y}$ $(y \neq 0)$. Таким образом, дифференциальное уравнение данного семейства имеет вид

$$y = e^{\frac{y'}{y}x}. \blacktriangleright$$

5. $x - C_1y^2 - C_2y - C_3 = 0$.

◀ Трижды продифференцировав данное равенство по x, получаем:

$$1 - 2yy'C_1 - C_2y' = 0, \quad 2\left(y'^2 + yy''\right)C_1 + C_2y'' = 0, \quad 2\left(3y'y'' + yy'''\right)C_1 + C_2y''' = 0. \qquad (1)$$

Из последнего равенства (1) находим

$$C_1 = -\frac{C_2y'''}{2(3y'y'' + yy''')} \quad (3y'y'' + yy''' \neq 0). \qquad (2)$$

Подставив (2) во второе равенство (1), получаем

$$y'^2y''' - 3y'y''^2 = 0 \quad \text{или} \quad 3y''^2 - y'y''' = 0,$$

в силу того, что $y' \neq 0$ (это следует из первого равенства (1)). ▶

Примечание. Во всех рассмотренных выше примерах мы предполагали, что существует производная требуемого порядка неявно заданной функции. Это предположение существенно, поскольку уже простейшее уравнение $y^2 - x^2 - C = 0$ определяет бесконечное множество разрывных неявных функций $y = y(x, C)$, $-\infty < x < +\infty$, например

$$y = \begin{cases} \sqrt{C + x^2}, & x \in \mathbb{Q}, \\ -\sqrt{C + x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad C \neq 0.$$

6. Написать дифференциальное уравнение всех окружностей на плоскости.

◀ Из курса аналитической геометрии известно, что каноническое уравнение окружности с центром в точке $M(C_1, C_2)$ и радиусом $R = C_3$ имеет вид:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 - C_3^2 = 0. \qquad (1)$$

Считая, что каждая окружность описывается двумя трижды непрерывно дифференцируемыми функциями $y = y(x)$, из (1) находим:

$$x - C_1 + (y(x) - C_2)y'(x) \equiv 0, \quad 1 + y'^2(x) + (y(x) - C_2)y''(x) \equiv 0, \quad 3y'(x)y''(x) + (y - C_2)y'''(x) \equiv 0.$$

Исключив из двух последних тождеств $y(x) - C_2$, окончательно получим:

$$y'''\left(1 + y'^2\right) - 3y'y''^2 = 0. \blacktriangleright$$

Примечание. Точнее говоря, мы получили дифференциальное уравнение всех окружностей, в каждой из которых выколоты две точки, лежащие на концах горизонтального диаметра.

7. Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

◀ Согласно условию задачи, в предыдущем примере следует положить $C_3 = 1$, $C_2 = 2C_1$. Тогда уравнение (1) из примера 6 примет вид

$$(x - C_1)^2 + (y - 2C_1)^2 - 1 = 0.$$

Получили однопараметрическое семейство окружностей. Дифференцируя тождество

$$(x - C_1)^2 + (y(x) - 2C_1)^2 - 1 \equiv 0$$

по переменной x (считая при этом, что y — непрерывно дифференцируемые функции от x), находим:

$$x - C_1 + (y(x) - 2C_1)y'(x) \equiv 0.$$

Из двух полученных тождеств путем исключения C_1 имеем окончательно

$$(2x - y)^2\left(y'^2 + 1\right) - (2y' + 1)^2 = 0. \blacktriangleright$$

8. Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной оси Oy, касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

◀ Семейство парабол с осью, параллельной оси Oy, имеет вид $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$, где C_j — произвольные параметры ($j = 1, 2, 3$). Из условия касания прямой $y = 0$ вытекает, что

$$y' \equiv 2C_1x_k + C_2 = 0, \quad C_1x_k^2 + C_2x_k + C_3 = 0,$$

где x_k — абсцисса точки касания. Отсюда следует, что

$$C_3 = \frac{C_2^2}{4C_1} \quad (C_1 \neq 0). \tag{1}$$

Из условия касания прямой $y = x$ вытекает, что должно быть

$$y' \equiv 2C_1x_k + C_2 = 1; \quad x_k = y_k; \quad y_k = C_1x_k^2 + C_2x_k + \frac{C_2^2}{4C_1}.$$

Отсюда находим, что $C_2 = \frac{1}{2}$. Подставив значение C_2 в (1), получим $C_3 = \frac{1}{16C_1}$. Таким образом, искомое семейство удовлетворяет уравнению

$$y = C_1x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16C_1},$$

где C_1 — произвольный параметр. Исключив его из тождеств

$$y' \equiv 2C_1x + \frac{1}{2}, \quad y \equiv C_1x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16C_1},$$

получим требуемое дифференциальное уравнение семейства

$$xy'^2 = y(2y' - 1). \ ▶$$

9. Составить дифференциальное уравнение окружностей, касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $x = 0$ и расположенных в первой и третьей четвертях.

◀ Ясно, что центры таких окружностей должны лежать на прямой $y = x$. Отсюда следует, что $C_1 = C_2$ (см. пример 6). А так как окружности касаются координатных осей, то $C_3 = |C_1|$. Таким образом, рассматриваемое семейство окружностей удовлетворяет уравнению

$$(x - C_1)^2 + (y - C_1)^2 - C_1^2 = 0.$$

Из тождеств относительно x:

$$(x - C_1)^2 + (y(x) - C_1)^2 - C_1^2 \equiv 0, \quad x - C_1 + (y(x) - C_1)y'(x) \equiv 0$$

следует требуемое дифференциальное уравнение

$$y'^2(x^2 - 2xy) - 2xy' + y^2 - 2xy = 0. \ ▶$$

10. Составить дифференциальное уравнение семейства циклоид

$$x = C(t - \sin t), \quad y = C(1 - \cos t).$$

◀ Дифференцируя функции x и y по t и разделив $y'(t)$ на $x'(t)$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}, \quad t = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{y'}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Подставив значение t в равенство

$$(t - \sin t)y - x(1 - \cos t) = 0,$$

после некоторых преобразований получим требуемое дифференциальное уравнение

$$y' = \operatorname{ctg}\frac{x + yy'}{y\left(1 + y'^2\right)}. \ ▶$$

11. Показать, что дифференциальное уравнение кривых 2-го порядка имеет вид

$$9y''^2 y^{\mathrm{V}} - 45y''y'''y^{\mathrm{IV}} + 40y'''^3 = 0.$$

◄ Пусть в общем уравнении семейства кривых второго порядка $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ выполняется условие $a \neq 0$. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что $a = 1$. Дифференцируя 5 раз, получим:

$$x + b(y + xy') + cyy' + d + ey' = 0, \qquad (1)$$

$$1 + b(2y' + xy'') + c\left(y'^2 + yy''\right) + ey'' = 0, \qquad (2)$$

$$b(3y'' + xy''') + c(3y'y'' + yy''') + ey''' = 0, \qquad (3)$$

$$b\left(4y''' + xy^{\mathrm{IV}}\right) + c\left(3y''^2 + 4y'y''' + yy^{\mathrm{IV}}\right) + ey^{\mathrm{IV}} = 0, \qquad (4)$$

$$b\left(5y^{\mathrm{IV}} + xy^{\mathrm{V}}\right) + c\left(10y''y''' + 5y'y^{\mathrm{IV}} + yy^{\mathrm{V}}\right) + ey^{\mathrm{V}} = 0. \qquad (5)$$

Из уравнений (2), (3), (4) находим

$$b = \frac{3y''y^{\mathrm{IV}} - 4y'''^2}{\Delta}, \quad c = \frac{3y''^2 y''' + 4y'y'''^2 - 3y'y''y^{\mathrm{IV}}}{\Delta}, \qquad (6)$$

где $\Delta = 3y'^2 y'' y^{\mathrm{IV}} - 4y'^2 y'''^2 - 6y'y''^2 y''' + 9y''^4$.

Исключив из уравнений (2) и (5) e и подставив в результат исключения значения b и c из (6), получим окончательно

$$9y''^2 y^{\mathrm{V}} - 45y''y'''y^{\mathrm{IV}} + 40y'''^3 = 0,$$

что и требовалась показать. ►

12. Показать, что дифференцируемое семейство кривых

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln C\sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0.$$

◄ Взяв полный дифференциал от тождества

$$\operatorname{arctg} \frac{y(x)}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2(x)} \equiv \ln C,$$

получим

$$d\left(\operatorname{arctg} \frac{y(x)}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2(x)}\right) \equiv 0,$$

откуда

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} - \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = 0, \quad (x^2 + y^2 \neq 0),$$

или

$$(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0. \ ►$$

13. Составить дифференциальное уравнение всех окружностей, касающихся оси Ox.

◄ Если в уравнении семейства окружностей (см. пример 6) положить $C_3 = |C_2|$, то получим уравнение семейства окружностей с требуемыми свойствами:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 - C_2^2 = 0. \qquad (1)$$

Определив C_1 и C_2 из тождеств

$$x - C_1 + y'(y - C_2) \equiv 0, \quad 1 + y'^2 + (y - C_2)y'' \equiv 0$$

и подставив их значения в (1), получим дифференциальное уравнение

$$y^2 y''^2 + 2y\left(1 + y'^2\right)y'' - y'^2\left(1 + y'^2\right)^2 = 0. \ ►$$

Найти системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют линии данных семейств.

14. $ax + z = b$, $y^2 + z^2 = b^2$.

Представив параметрические уравнения кривой в виде

$$x = x, \quad y = y(x), \quad z = z(x),$$

где y и z — непрерывно дифференцируемые функции, и подставив их в данные уравнения, получим тождества относительно x

$$ax + z(x) \equiv b, \quad y^2(x) + z^2(x) \equiv b^2. \tag{1}$$

Продифференцировав эти тождества по x, получим

$$a + z'(x) \equiv 0, \quad y(x)y'(x) + z(x)z'(x) \equiv 0,$$

откуда $a = -z'$. Подставив значение a в первое из тождеств (1), имеем $b = z - xz'$. Это соотношение совместно со вторым тождеством из (1) приводит к равенству $y^2 + 2zz'x - x^2z'^2 = 0$. Таким образом, искомая система уравнений имеет вид

$$yy' + zz' = 0, \quad y^2 + 2xzz' - x^2z'^2 = 0. ►$$

15. $x^2 + y^2 = z^2 - 2bz$, $y = ax + b$.

◄ По аналогии с предыдущим примером имеем

$$2x + 2yy' = 2zz' - 2bz', \quad y' = a,$$

откуда находим $a = y'$, $b = \frac{1}{z'}(zz' - x - yy')$. Подставив значения a и b в исходные уравнения, получим:

$$b = y - xy', \quad z'(y - xy') = zz' - x - yy', \quad x^2 + y^2 = z^2 - 2z(y - xy').$$

Последние два соотношения и есть требуемые дифференциальные уравнения. ►

16. Найти частное решение некоторого дифференциального уравнения, если его общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x \quad \text{и} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

◄ Дважды дифференцируя y по x, легко находим соответствующее дифференциальное уравнение:

$$y'' + \alpha^2 y = 0.$$

Для отыскания частного решения этого уравнения следует воспользоваться начальными условиями, чтобы найти постоянные C_1 и C_2. Имеем

$$y(0) = (C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x)|_{x=0} = C_1 = 1, \quad y'(0) = \alpha(-C_1\sin\alpha x + C_2\cos\alpha x)|_{x=0} = \alpha C_2 = 0.$$

Итак, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $y = \cos\alpha x$ — частное решение. ►

17. Найти частное решение дифференциального уравнения, если его общее решение имеет вид

$$y = C_1 + C_2 \ln x + C_3 x^3$$

и удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 2.$$

◄ Исходя из условий примера, имеем

$$y(1) = \left(C_1 + C_2\ln x + C_3x^3\right)\Big|_{x=1} = 1, \quad y'(1) = \left(\frac{C_2}{x} + 3C_3x^2\right)\Big|_{x=1} = 0, \quad y''(1) = \left(-\frac{C_2}{x^2} + 6C_3x\right)\Big|_{x=1} = 2.$$

Отсюда находим, что $C_1 = -\frac{2}{9}$, $C_2 = -\frac{2}{3}$, $C_3 = \frac{2}{9}$. Осталось записать частное решение:

$$y = -\frac{2}{9} - \frac{2}{3}\ln x + \frac{2}{9}x^3.$$

Составить соответствующее дифференциальное уравнение предоставляем читателю. ►

18. Пусть некоторое частное решение удовлетворяет задаче Коши

$$y' = x + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Может ли оно удовлетворять другой задаче Коши

$$y'' = 1 + 2xy + 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1?$$

◀ Если частное решение дважды непрерывно дифференцируемо, то из первой задачи Коши находим:

$$y'' = 1 + 2yy' = 1 + 2y\left(x + y^2\right) = 1 + 2xy + 2y^3,$$

а также $y'(0) = 1$. Следовательно, это возможно. ▶

19. Пусть общее решение некоторого дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1x + C_2e^x + C_3\left(x + x^2\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Может ли функция $y = x + 1$ быть частным решением этого уравнения?

◀ Нет, не может, поскольку ни при каких значениях произвольных постоянных (в том числе и $\pm\infty$) из формулы общего решения получить ее нельзя. ▶

Упражнения для самостоятельной работы

Путем исключения постоянных C_j найти дифференциальные уравнения следующих семейств кривых:

1. $y - \operatorname{tg}(C_1x) = 0$. **2.** $y = C_1e^{\frac{x}{C_2}}$. **3.** $\dfrac{x^2}{1+C_1} + \dfrac{y^2}{2+C_2} - 1 = 0$.

4. $y = C_1 \sin\varphi(x) + C_2\cos\varphi(x), \quad \varphi(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$. **5.** $\rho = C_1\varphi$.

6. $\rho^2 + \varphi^2 - C_1 = 0$ (ρ, φ — полярные координаты).

7. $\begin{cases} C_1y^2 - C_2z^2 + C_3x = 0, \\ C_1\sin y + 4C_2e^z - 2C_3 = 0. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} C_1y + C_2z + C_3x + C_4 = 0, \\ C_1y^2 + C_2z^2 + C_3x^2 + 2C_4 = 0. \end{cases}$

Глава 1

Дифференциальные уравнения первого порядка

§ 1. Уравнения с разделяющимися переменными

1.1. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$f_1(x)f_2(y)\,dx + g_1(x)g_2(y)\,dy = 0, \tag{1}$$

где f_i, g_i $(i = 1, 2)$ — заданные непрерывные функции, $x \in (a, b)$, $y \in (c, d)$, называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Для того, чтобы проинтегрировать уравнение (1), следует сначала обе его части разделить на произведение $f_2(y)g_1(x)$ $(f_2(y)g_1(x) \neq 0)$, а затем, пользуясь формулой

$$d\left(\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy\right) = f(x)\,dx + g(y)\,dy,$$

записать

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,dx + \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)}\,dy = C. \tag{2}$$

При делении могли быть потеряны решения уравнений $f_2(y) = 0$ и $g_1(x) = 0$. Поэтому для получения всех решений уравнения (1) следует к семейству интегральных кривых (2) присоединить нули функций f_2 и g_1.

1.2. Разделение переменных линейной заменой аргумента.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + b) \quad (a,\, b \text{ — постоянные}), \tag{3}$$

где f — непрерывная функция, посредством подстановки $t = ax + b$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$(a + bf(t))\,dx - dt = 0.$$

Решить следующие уравнения.

20. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.

◄ Это уравнение вида (1). Деля обе его части на произведение $\sqrt{y^2+1}\cdot x$, получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}}, \quad x \neq 0,$$

откуда

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} + C,$$

или

$$\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C.$$

Таким образом, все решения данного уравнения имеют вид

$$\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C, \quad x = 0. \blacktriangleright$$

21. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, $y(0)=1$.

◀ Сначала находим все решения этого уравнения. Имеем

$$(x^2-1)dy+2xy^2\,dx=0,$$

откуда, разделив переменные x и y, получаем

$$\frac{dy}{y^2}+\frac{2x\,dx}{x^2-1}=0.$$

Интегрируя обе части полученного уравнения, находим

$$-\frac{1}{y}+\ln|x^2-1|=C. \tag{1}$$

Для получения всех решений исходного уравнения к последнему семейству интегральных кривых присоединим еще решение $y=0$.

Далее, из совокупности всех интегральных кривых выделим ту кривую, которая проходит через точку $(0, 1)$. Полагая в (1) $x=0$ и $y=1$, находим $C=-1$. Таким образом, функция

$$y=\frac{1}{1+\ln|x^2-1|}$$

является решением поставленной задачи. ▶

22. $xy'+y=y^2$, $y(1)=0{,}5$.

◀ Записывая уравнение в виде

$$x\,dy+(y-y^2)\,dx=0 \tag{1}$$

и разделяя переменные, имеем

$$\frac{dy}{y-y^2}+\frac{dx}{x}=0.$$

Интегрируя, получаем

$$xy(1-y)=C. \tag{2}$$

Заметим, что несмотря на деление обеих частей уравнения на $x(y-y^2)$, его решения $x=0$, $y=0$ и $y=1$ не были потеряны. Наконец, подставив в (2) $x=1$, $y=0{,}5$, находим $C=\frac{1}{4}$. Следовательно, дифференцируемая кривая

$$4xy(1-y)-1=0$$

— решение поставленной задачи. ▶

23. $e^{-s}\left(1+\dfrac{ds}{dt}\right)=1$.

◀ Переписав уравнение в виде

$$\frac{ds}{dt}=e^s-1,$$

разделяем переменные s и t:

$$\frac{ds}{e^s-1}=dt.$$

Проинтегрировав полученное уравнение, находим

$$\ln\left|\frac{e^s-1}{e^s}\right|=t+\ln C, \quad \text{или} \quad s=-\ln(1+Ce^t). \text{ ▶}$$

24. $y'=\cos(y-x)$.

◀ Полагая $z=y-x$, получим:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}-1.$$

Исходное уравнение приводится к виду

$$\frac{dz}{\cos z-1}=dx.$$

Интегрированием находим

$$x - \operatorname{ctg}\frac{z}{2} = C, \quad \text{или} \quad x - \operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} = C.$$

К этим решениям следует присоединить потерянные решения $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ▶

25. $y' - y = 2x - 3$.

◀ Записав уравнение в виде $dy = (y + 2x - 3)\,dx$ и произведя замену $z = y + 2x - 3$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$dz = (z+2)\,dx.$$

Отсюда при $z \neq -2$ следует, что

$$\frac{dz}{z+2} = dx.$$

Интегрируя уравнение, имеем

$$\ln|z+2| = x + \ln C,$$

или, окончательно,

$$y = 1 - 2x + Ce^x.$$

Очевидно, решение $z = -2$, т. е. $y = 1 - 2x$, принадлежит полученному семейству интегральных кривых (его можно включить в семейство при $C = 0$). ▶

Найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям при $x \to +\infty$.

26. $x^2y' - \cos 2y = 1$, $y(+\infty) = \frac{9}{4}\pi$.

◀ Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{2\cos^2 y} = \frac{dx}{x}, \quad x \neq 0, \quad \cos y \neq 0.$$

После интегрирования имеем

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} y = C - \frac{1}{x}, \quad \text{или} \quad y = \operatorname{arctg}\left(2C - \tfrac{2}{x}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Используя дополнительное условие, находим

$$\frac{9}{4}\pi = \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(2C - \tfrac{2}{x}\right) + 2k\pi\right) = \operatorname{arctg} 2C + 2k\pi.$$

Поскольку $|\operatorname{arctg} 2C| < \frac{\pi}{2}$, то отсюда следует, что $k = 1$, $\operatorname{arctg} 2C = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{1}{2}$. Таким образом, окончательно получаем

$$y = \operatorname{arctg}\left(1 - \tfrac{2}{x}\right) + 2\pi. \ ▶$$

27. $3y^2y' + 16x = 2xy^3$; $y(x)$ ограничено при $x \to +\infty$.

◀ Разделяем переменные x и y:

$$\frac{3y^2}{y^3 - 8}\,dy = 2x\,dx, \quad y \neq 2.$$

Интегрируя обе части уравнения, получим:

$$\int \frac{3y^2}{y^3-8}\,dy = 2\int x\,dx + C, \quad \ln|y^3 - 8| = x^2 + C.$$

Полагая $C = \ln C_1$ $(C_1 > 0)$, имеем

$$|y^3 - 8| = C_1 e^{x^2}.$$

Очевидно, что решение $y = 2$ можно включить в полученное семейство интегральных кривых, если считать, что $C_1 = 0$. Таким образом, все решения исходного уравнения описываются формулой

$$|y^3 - 8| = C_1 e^{x^2} \quad (C_1 \geqslant 0).$$

Из полученной формулы следует, что единственная кривая $y = 2$ удовлетворяет поставленному в задаче условию. ▶

28. Показать, что каждая интегральная кривая уравнения $y' = \sqrt[3]{\dfrac{y^2+1}{x^4+1}}$ имеет две горизонтальные асимптоты.

◀ Разделяя в дифференциальном уравнении переменные x и y, а затем интегрируя, получим

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{du}{\sqrt[3]{u^2+1}} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4+1}}, \tag{1}$$

где (x_0, y_0) — произвольная точка на плоскости Oxy.

Пусть в (1) $x \to +\infty$. Тогда в силу сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4+1}}$ существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{\sqrt[3]{u^2+1}} = a$. Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_{y_0}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt[3]{u^2+1}}$ расходится, то $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = y(+\infty)$ существует и конечен, причем $y(+\infty) > y_0$, так как $a > 0$.

Далее, пусть в (1) $x \to -\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty} \int\limits_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{\sqrt[3]{u^2+1}} = b, \quad \text{где} \quad b = \int\limits_{x_0}^{-\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4+1}} < 0.$$

Следовательно, $-\infty < y(-\infty) < y_0$. Таким образом, формула (1) описывает семейство интегральных кривых, каждая из которых имеет две горизонтальные асимптоты $y(-\infty)$ и $y(+\infty)$. ▶

29. Исследовать поведение интегральных кривых уравнения

$$y' = \sqrt{\frac{\ln(1+y)}{\sin x}}$$

в окрестности начала координат. Показать, что из каждой точки границы первого координатного угла выходит одна интегральная кривая, проходящая внутри этого угла.

◀ Находим область D существования функции в правой части уравнения:

$$D = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} M_k,$$

где

$$M_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ 0 \leqslant y < +\infty \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi,\ -1 < y \leqslant 0 \right\}.$$

Пусть $0 \leqslant y < +\infty$, $0 < x < \pi$, $0 < x_0 < \pi$. Тогда разделяя переменные в уравнении и интегрируя, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{\sin t}} = \int\limits_{0}^{y} \frac{du}{\sqrt{\ln(1+u)}}. \tag{1}$$

Поскольку при $u \to 0$ $\ln(1+u) \sim u$, то интеграл в правой части равенства (1) сходится по признаку сравнения. В силу положительности подынтегральной функции $\int\limits_0^y \frac{du}{\sqrt{\ln(1+u)}} > 0$. Следовательно, $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{\sin t}} > 0$. Отсюда находим, что $x > x_0$. Такими образом, при $x > x_0$ имеем $y > 0$ (и наоборот), т. е. интегральная кривая, определяемая уравнением (1) и выходящая из точки $(x_0, 0)$, находится в первом квадранте. Из неравенства $y' > 0$ вытекает, что $y = y(x)$ возрастает с возрастанием x. Однако в силу расходимости интеграла в правой части (1) при $y \to +\infty$ и сходимости интеграла в его левой части при $x \to \pi - 0$ следует, что y стремится к конечному пределу при $x \to \pi - 0$.

Аналогичную ситуацию получим при рассмотрении равенства интегралов

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\sin t}} = \int_{y_0}^y \frac{du}{\sqrt{\ln(1+u)}}, \quad 0 \leqslant y < +\infty, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 \leqslant y_0 < +\infty.$$

Пусть $-1 < y \leqslant 0$, $-\pi < x < 0$. Тогда, разделив переменные в исходном уравнении и проинтегрировав полученное, имеем

$$\int_{x_0}^x \frac{dt}{\sqrt{-\sin t}} = \int_0^y \frac{du}{\sqrt{-\ln(1+u)}}. \tag{2}$$

Поскольку $y < 0$, то интеграл справа в (2) отрицателен. Значит, $x < x_0$. Следовательно, интегральная кривая, выходящая из точки $(x_0, 0)$ $(x_0 < 0)$ стремится вниз налево. Далее, как следует из дифференциального уравнения, при $x \to -\pi + 0$ или при $y \to -1 + 0$ производная $y' \to +\infty$. Таким образом, интегральные кривые асимптотически приближаются к отрезкам прямых $x = -\pi$ или $y = -1$, причем к отрезку прямой $x = -\pi$ они приближаются по касательной, а к отрезку прямой $y = -1$ — по нормали. ►

§ 2. Геометрические и физические задачи, приводящие к уравнениям с разделяющимися переменными

2.1. Использование геометрического смысла производной.

Для решения геометрических задач целесообразно использовать чертежи, а также геометрический смысл производной и интеграла.

2.2. Использование физического смысла производной.

При составлении дифференциального уравнения, описывающего физический процесс, наряду с применением физических законов используем физический смысл производной, как скорости изменения какой-либо величины.

30. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная a^2.

◄ Как видим из рис. 1, площадь указанного треугольника равна $S = \frac{1}{2}|NK|y$. Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = y'$ (это вытекает из геометрического смысла производной), то $S = \frac{y^2}{2y'}$, $y' > 0$. Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{y^2}{2} = a^2 y'.$$

Считая $y \neq 0$ и разделяя переменные, получаем

$$\frac{2\,dy}{y^2} = \frac{dx}{a^2}.$$

Отсюда находим $-\frac{2}{y} = \frac{x}{a^2} + C$, или

$$y = -\frac{2a^2}{Ca^2 + x}.$$

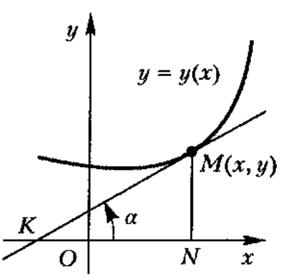

Рис. 1

Если $y' < 0$ (см. рис. 2), то $S = -\frac{y^2}{2y'} = a^2$. Интегрируя это уравнение, получаем

$$y = \frac{2a^2}{x - Ca^2}.$$

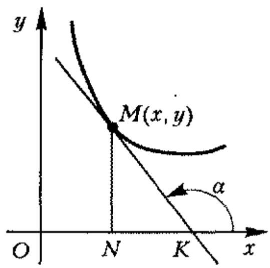

Рис. 2

Наконец, обозначив $Ca^2 = -\widetilde{C}$, оба ответа объединяем в один:

$$y = \frac{2a^2}{\widetilde{C} \pm x}. \blacktriangleright$$

31. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равен $2a$.

◀ Из рис. 3 видим, что $|KL| + |LN| = \frac{y}{y'} + yy'$. Таким образом, требуемое дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{y}{y'} + yy' = 2a.$$

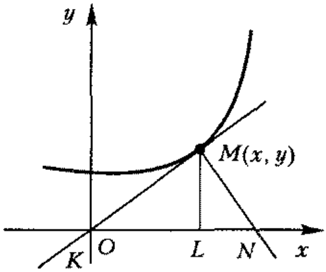

Рис. 3

Разрешив его относительно производной, получаем

$$y' = \frac{a}{y} \pm \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}.$$

Пусть $0 < y \leqslant a$. Тогда из дифференциального уравнения находим

$$\frac{y\,dy}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} = dx, \quad \frac{d(a^2 - y^2)}{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}} = -2\,dx.$$

Интегрируя это соотношение, получим

$$\sqrt{a^2 - y^2} - a \ln\left(a \pm \sqrt{a^2 - y^2}\right) \pm x = C.$$

Случай $-a \leqslant y < 0$ и $y' < 0$ рассматривается аналогично. ▶

32. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении $1:2$.

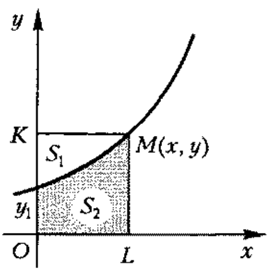

Рис. 4

◀ Согласно геометрической интерпретации интеграла имеем (см. рис. 4)

$$S_2 = \int_0^x y(t)\,dt. \tag{1}$$

Далее, поскольку $S_1 + S_2 = xy$ и $S_2 = 2S_1$, то, приняв во внимание (1), получим

$$S_2 = \frac{2}{3}xy = \int_0^x y(t)\,dt.$$

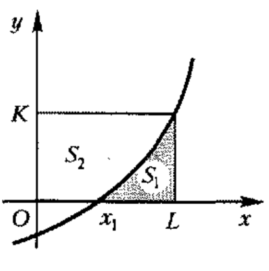

Рис. 5

Дифференцируя это равенство по x, находим

$$\frac{2}{3}(xy' + y) = y, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x},$$

откуда $y = C\sqrt{x}$, или

$$x = Cy^2.$$

Очевидно, если переменные x и y поменять ролями, то задача также будет иметь решение $y = Cx^2$. ▶

Замечание 1. В процессе решения предполагали, что переменные x и y положительны. Однако, как легко видеть, они могут быть и отрицательными, т.е. можно считать, что постоянная C в обоих решениях принимает любое действительное значение.

Замечание 2. Если вместо рис. 4 воспользоваться рис. 5, то придем к такому же результату, т. е, во всех случаях получаем семейства парабол с вершинами в начале координат. Предлагаем читателю уточнить рисунки 4 и 5 в соответствии с полученным решением задачи.

33. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют равные углы с полярным радиусом и полярной осью.

◄ Используя соотношения между углами α и φ (см. рис. 6), а также геометрическую интерпретацию производной

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{\rho' \sin\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi} = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2}(\pi - \varphi),$$

после несложных выкладок получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

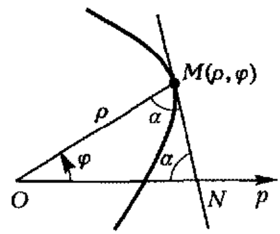

Рис. 6

интегрируя которое, находим

$$\ln\rho = -2\ln\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| + \ln 2C, \qquad (1)$$

или

$$\rho = \frac{C}{1+\cos\varphi}. \blacktriangleright$$

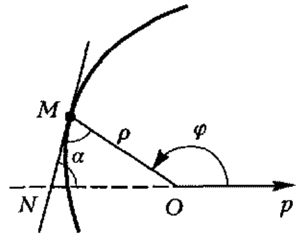

Рис. 7

Замечание. Если вместо рис. 6 рассмотреть рис. 7, то получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

из которого следует, что

$$\rho = \frac{C}{1-\cos\varphi}.$$

Это семейство получим из семейства (1) путем замены φ на $\varphi+\pi$. Таким образом, окончательный ответ записывается в виде

$$\rho = \frac{C}{1\pm\cos\varphi}.$$

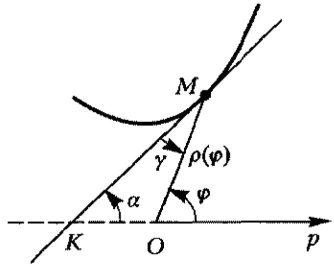

Рис. 8

34. Найти уравнение кривой в полярных координатах, если известно, что тангенс угла γ, образованного радиусом-вектором, проведенным в точку касания, и касательной к кривой в этой же точке, равен полярному углу φ.

◄ Используя условие $\operatorname{tg}\gamma = \varphi$ и соотношение $\varphi = \alpha + \gamma$ (см. рис. 8), можем записать

$$\varphi = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\alpha}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\rho'\operatorname{tg}\varphi + \rho}{\rho' - \rho\operatorname{tg}\varphi}$, поэтому из предыдущего уравнения после несложных преобразований получаем

$$\varphi = -\frac{\rho}{\rho'}.$$

Решив это дифференциальное уравнение, найдем

$$\rho = \frac{C}{\varphi} \quad (\varphi \neq 0). \blacktriangleright$$

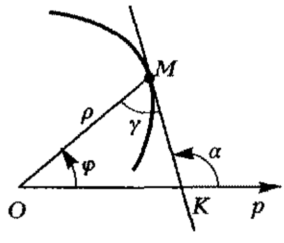

Рис. 9

Замечание. Если вместо рис. 8 рассмотреть рис. 9, то аналогичным путем можно получить дифференциальное уравнение $\varphi = \dfrac{\rho}{\rho'}$, из которого следует, что $\rho = C\varphi$.

35. Нормаль MQ к некоторой кривой пересекает ось Ox в точке Q. Доказать, что если абсцисса точки Q вдвое больше абсциссы точки M, то кривая — равнобочная гипербола

◄ Из рис. 10 видим, что

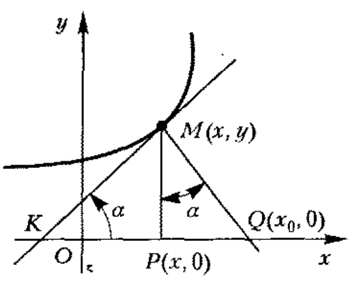

Рис. 10

Используя условие $x_0 = 2x$ и соотношение $y' = \operatorname{tg}\alpha$, из (1) получаем дифференциальное уравнение

$$x = yy'.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$y\,dy = x\,dx, \quad y^2 - x^2 = C. \qquad (2)$$

Из курса аналитической геометрии известно, что каноническое уравнение гиперболы имеет один из видов:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

причем, если $a = b$, то гипербола называется равнобочной. Легко видеть, что второе соотношение в (2) определяет два семейства равнобочных гипербол (для $C > 0$ и для $C < 0$). ►

Примечание. При $C = 0$ из (2) получаем пару прямых $y = \pm x$ — так называемые *вырожденные гиперболы*.

36. Доказать, что кривая, все нормали к которой проходят через одну и ту же фиксированную точку, есть окружность.

◄ Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка, через которую проходят все нормали, и $M_1(x_1, y_1)$ — точка, расположенная на кривой. Тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки, имеет вид

$$y = -\frac{1}{y_1'(x_1)}(x - x_0) + y_0.$$

Этому уравнению удовлетворяют также координаты точки $M_1(x_1, y_1)$, поэтому должно быть

$$y_1(x_1) = -\frac{1}{y_1'(x_1)}(x_1 - x_0) + y_0.$$

Разделяя переменные x_1 и y_1 и интегрируя, получим:

$$(y_1 - y_0)\,d(y_1 - y_0) + (x_1 - x_0)\,d(x_1 - x_0) = 0,$$
$$(y_1 - y_0)^2 + (x_1 - x_0)^2 = C^2.$$

Таким образом, если $C \neq 0$, то имеем уравнение окружности радиуса C с центром в точке M_0. ►

37. Сосуд объемом в 20 л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд при непрерывном перемешивании каждую секунду втекает 0,1 л азота и вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 99% азота?

◄ Пусть $Q(t)$ — количество литров азота в сосуде в момент времени t после начала перемешивания. Тогда в $0{,}1\,dt$ литрах смеси содержится $\frac{0{,}1 \cdot Q\,dt}{20}$ литров азота. Согласно условию задачи, в сосуд за время dt поступит $0{,}1\,dt$ л азота, а вытечет $\frac{0{,}1 \cdot Q\,dt}{20}$ л. Следовательно, количество dQ азота, котрое втекает в сосуд за время dt и остается в нем, равно $0{,}1\left(1 - \frac{Q}{20}\right)dt$ литров. Получаем дифференциальное уравнение

$$dQ = 0{,}1\left(1 - \frac{Q}{20}\right)dt \quad \text{или} \quad \frac{dQ}{20 - Q} = \frac{dt}{200},$$

интегрируя которое, находим

$$Q = 20 - Ce^{-0{,}005t}.$$

Для определения постоянной C используем условие $Q(t)|_{t=0} = 16$ л. Получаем $C = 4$, вследствие чего функция

$$Q(t) = 20 - 4e^{-0{,}005t} \qquad (1)$$

есть решение поставленной задачи. Полагая в (1) $t = T$ и $Q = 19{,}8$ л (что составляет 99% от 20 л), находим

$$T = 200 \ln 20 \text{ с} = 599{,}2 \text{ с} \approx 10 \text{ минут}$$

— через такой промежуток времени после начала перемешивания в сосуде будет 99% азота. ►

38. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько останется соли в баке через час?

◀ Пусть $Q(t)$ кг — количество соли в баке в момент времени t после начала истечения смеси из бака. Тогда $\frac{Q}{100}$ есть ее концентрация в данном растворе, а $\frac{Q}{100} \cdot 5\,dt$ — количество соли, вытекающее из бака за время dt мин. Следовательно, имеем дифференциальное уравнение

$$dQ = -0{,}05\,Q\,dt.$$

Здесь знак "$-$" указывает на то, что количество соли в баке уменьшается. Интегрируя уравнение, получаем $Q = Ce^{-0{,}05t}$. Поскольку при $t = 0$ в баке имелось 10 кг соли, то $C = 10$. Таким образом, $Q = 10e^{-0{,}05t}$ есть решение данной задачи. Полагая в последнем равенстве $t = 60$ мин, получаем, что количество соли в баке через час равно $10e^{-3}$ кг $\approx 0{,}5$ кг. ▶

39. В воздухе комнаты объемом 200 м^3 содержится 0,15% углекислого газа CO_2. Вентилятор подает в минуту 20 м^3 воздуха, содержащего 0,04% CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

◀ Пусть $Q(t)$ м^3 — количество углекислого газа в комнате в момент времени t после начала работы вентилятора. Тогда $\frac{Q(t)}{200}$ есть концентрация его в комнате в момент времени t. Следовательно, 20 м^3 воздуха, которые уходят из комнаты за минуту, содержат $0{,}1Q(t)$ м^3 CO_2. Поэтому за время dt мин из комнаты уйдет $0{,}1Q(t)\,dt$ м^3 CO_2. За это же время вентилятор подаст $\frac{0{,}04\%}{100\%}\,20\,dt$ м^3 $= 0{,}008\,dt$ м^3 CO_2 в комнату. Таким образом, приращение dQ газа CO_2 за время dt равно $(0{,}008 - 0{,}1Q(t))\,dt$, и мы имеем дифференциальное уравнение

$$dQ = (0{,}008 - 0{,}1Q)\,dt.$$

Проинтегрировав, получим

$$Q(t) = (0{,}08 - Ce^{-0{,}1t})\ \text{м}^3.$$

Поскольку при $t = 0$ $Q = 0{,}3$ м^3 (т. е. 0,15% от 200 м^3), то $C = -0{,}22$. Таким образом, $Q = 0{,}08 + 0{,}22e^{-0{,}1t}$. Момент времени T, когда количество CO_2 будет 0,1 м^3, находим из равенства $0{,}1 = 0{,}08 + 0{,}22e^{-0{,}1T}$. Получаем

$$T = 10 \ln 11 \approx 24 \text{ мин.}$$ ▶

40. Скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°C. Когда тело остынет до 25°C, если за 10 минут оно охладилось от 100°C до 60°C?

◀ Согласно указанному закону, можем написать соотношение

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0), \tag{1}$$

где T — температура тела, T_0 — температура окружающего воздуха, k — коэффициент пропорциональности. В нашем случае $T_0 = 20$°C. Интегрируя уравнение (1), получим

$$T = 20 + Ce^{kt}.$$

Из условия $T(t)|_{t=0} = 100$°C находим $C = 80$, а условие $T(t)|_{t=10} = 60$°C позволяет определить k. Следовательно,

$$k = -0{,}1 \ln 2, \quad T(t) = 20 + 80e^{-0{,}1t\ln 2} = 20 + 80 \cdot 2^{-0{,}1t}$$

Полагая здесь $T = 25$°C, находим требуемый момент времени

$$t_1 = 40 \text{ мин.}$$ ▶

41. В сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре 20°C, опущен металлический предмет с массой 0,5 кг, удельной теплоемкостью $0{,}2c_{H_2O}$ и температурой 75°C. Через минуту вода нагрелась на 2°C. Когда температуры воды и предмета будут отличаться одна от другой на 1°C? Потерями тепла на нагревание сосуда и прочими пренебречь.

◀ По аналогии с предыдущим примером имеем

$$\frac{dT_{\text{п}}}{dt} = k_{\text{п}}(T_{\text{п}} - T_{\text{в}}), \qquad \frac{dT_{\text{в}}}{dt} = k_{\text{в}}(T_{\text{в}} - T_{\text{п}}),$$

где $T_п$ и $T_в$ — температуры предмета и воды соответственно, $k_п$ и $k_в$ — постоянные коэффициенты. Вычитая почленно из первого соотношения второе и вводя обозначение $R = T_п - T_в$, можем записать

$$\frac{dR}{dt} = kR, \quad k = k_п + k_в.$$

Отсюда находим $R = Ce^{kt}$. Поскольку в начальный момент времени $t = 0$ разность $R = 55°$, то $C = 55$. Поэтому $R = 55e^{kt}$. Для определения коэффициента k воспользуемся уравнением теплового баланса. Имеем по общей формуле для теплоты $Q = cm(T_k - T_п)$, где c — удельная теплоемкость тела, m — его масса, $T_k - T_п$ — разность температур:

$$Q_1 = 2c_{H_2O}, \quad Q_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}5(75 - T)c_{H_2O}.$$

Здесь Q_1 — количество тепла, поглощенное водой, Q_2 — количество тепла, выделенное предметом при остывании до температуры T. Поскольку по условию $Q_1 = Q_2$, то $T = 55°C$. Таким образом, через минуту $R = 55°C - 22°C = 33°C$. А тогда $33°C = 55°C\,e^k$, откуда $k = \ln 0{,}6$. Поэтому $R = 55 \cdot (0{,}6)^t$ есть закон сближения температур воды и тела. Из равенства $1 = 55 \cdot (0{,}6)^{t_1}$ находим

$$t_1 = \frac{\ln 55}{\ln 5 - \ln 3} \approx 8 \text{ мин}$$

— время, по истечении которого температура тела будет выше температуры воды на 1°C. ►

42. Кусок металла с температурой a помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от a до b. Скорость нагрева металла пропорциональна разности T температур печи и металла, коэффициент пропорциональности равен k. Найти температуру тела через час.

◄ Согласно условию, имеем

$$\frac{dT_м}{dt} = k(T_п - T_м), \tag{1}$$

где $T_п$ и $T_м$ — температуры печи и металла соответственно. Далее, $T_п = a + \frac{1}{60}(b-a)t$ в силу равномерного повышения температуры печи, t — время, измеряемое в минутах. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{dT_м}{dt} = k\left(a + \frac{t}{60}(b-a) - T_м\right). \tag{2}$$

Введем замену $a + \frac{t}{60}(b-a) - T_м = z$. Тогда уравнение (2) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{kz - \frac{b-a}{60}} = -dt,$$

интегрируя которое, находим

$$\frac{1}{k}\ln\left(kz - \frac{b-a}{60}\right) = -t + \frac{1}{k}\ln C, \quad k \neq 0,$$

или

$$T_м = a + \left(t - \frac{1}{k}\right)\frac{b-a}{60} + Ce^{-kt}.$$

Так как $T_м(t)|_{t=0} = a$, то $C = \frac{b-a}{60k}$. Следовательно, окончательно имеем

$$T_м = a + \frac{b-a}{60}\left(t - \frac{1}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)\right).$$

Температура металла через час, очевидно, будет равна

$$T_м(60) = b - \frac{b-a}{60k}\left(1 - e^{-60k}\right). ►$$

43. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, а через 4 с скорость ее 1 м/с. Когда скорость лодки уменьшится до 1 см/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

◀ Пусть $v(t)$ — скорость лодки в момент времени t от начала движения. Тогда $\frac{dv}{dt}$ есть ее ускорение. Согласно второму закону Ньютона

$$m\,\frac{dv}{dt} = F, \tag{1}$$

где F — сила сопротивления воды. По условию $F = kv$, поэтому (1) принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}\,v = k_0 v \quad (k_0 = \mathrm{const}).$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v(t) = Ce^{k_0 t}. \tag{2}$$

Используя условие $v(0) = 1{,}5$, находим $C = 1{,}5$. Тогда (2) имеет вид

$$v(t) = 1{,}5e^{k_0 t},$$

где t измеряется в секундах. Поскольку $v(4) = 1$ м/с, то из равенства $1 = 1{,}5e^{4k_0}$ следует, что $k_0 = 0{,}25\ln(2/3)$. Поэтому скорость движения лодки выражается формулой

$$v(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1} \text{ м/с}. \tag{3}$$

Подставляя сюда $v = 1$ см/с $= 0{,}01$ м/с, находим соответствующий момент времени

$$t_1 = 4\left(1 + \frac{\ln 0{,}01}{\ln(2/3)}\right) \approx 50 \text{ с}.$$

Далее, поскольку $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, где $s(t)$ — путь, из (3) получаем

$$s(t) = \frac{4}{\ln(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1} + s_0,$$

где s_0 — постоянная интегрирования. Пусть $s(0) = 0$. Тогда $s_0 = -\frac{4}{\ln(2/3)}\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, и закон движения лодки имеет вид

$$s(t) = \frac{6}{\ln(2/3)}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}} - 1\right).$$

Из (3) видим, что $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0$, поэтому из закона движения лодки получаем

$$s_1 = \lim_{t\to+\infty} s(t) = \frac{6}{\ln(3/2)} \approx 15 \text{ м},$$

где s_1 — путь, который проходит лодка до остановки. ▶

44. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

◀ Воспользуемся законом радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющегося в рассматриваемый момент. Пусть $Q(t)$ — количество радиоактивного вещества в момент времени t после начала распада. Тогда, в соответствии с законом радиоактивного распада, имеем $q(t) = kQ(t)$, где k — коэффициент пропорциональности, $q(t)$ — количество вещества, распадающегося за единицу времени. Следовательно, за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ распадется $kQ(t_1)\Delta t$ вещества, где $t_1 \in (t, t + \Delta t)$, $Q(t_1)$ — некоторое промежуточное значение количества вещества между $Q(t)$ и $Q(t + \Delta t)$. С другой стороны, это же количество равно $Q(t + \Delta t) - Q(t)$, поэтому окончательно имеем

$$Q(t + \Delta t) - Q(t) = kQ(t_1)\Delta t, \quad \text{или} \quad \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = kQ(t_1).$$

Считая функцию Q дифференцируемой и переходя к пределу в последнем соотношении при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ(t)}{dt} = kQ(t), \tag{1}$$

решением которого является функция $Q(t) = Ce^{kt}$. Очевидно, постоянная C здесь означает первоначальное количество вещества. Далее, из условия $0{,}5C = Ce^{30k}$ находим $k = -\frac{1}{30}\ln 2$, а из условия $0{,}01C = Ce^{-\frac{t}{30}\ln 2}$ получаем

$$t_1 = \frac{\ln 100}{\ln 2} \cdot 30 \approx 200 \text{ (дней)}$$

— время, по истечении которого останется лишь 1% первоначального количества вещества.

Общая же формула для оставшегося количества вещества имеет вид

$$Q(t) = Q(0)2^{-\frac{t}{30}},$$

где t — время, измеряемое в днях. ►

45. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

◄ Пусть $Q(t)$ — количество радия. Тогда оно удовлетворяет уравнению (1) из предыдущей задачи. Следовательно, функция $Q(t) = Q(0)e^{kt}$ выражает закон его распада, где t — время, измеряемое в годах. Для определения коэффициента k воспользуемся условием: через $t = 1$ год $Q = 999{,}56$ мг, если $Q(0) = 1$ г. Отсюда $e^k = 0{,}99956$. Таким образом, $Q(t) = Q(0)(0{,}99956)^t$ Положив здесь $Q(t_1) = 0{,}5Q(0)$, определим время

$$t_1 = -\frac{\ln 2}{\ln 0{,}99956} \approx 1600 \text{ лет.} ►$$

46. В исследованном куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы, считая, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебрегая наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).

◄ Прежде всего, определим начальное количество урана в куске породы. Пусть y — количество полностью распавшегося урана в нем. Тогда, приняв во внимание условия задачи, можем составить пропорцию

$$\frac{y}{14} = \frac{238}{206},$$

из которой находим $y = 14 \cdot \frac{238}{206} \approx 16{,}2$ мг. Следовательно, первоначальное количество урана составляет 116,2 мг.

Далее, исходя из общей формулы $Q(t) = 116{,}2e^{kt}$, где $Q(t)$ — количество нераспавшегося урана, и периода его полураспада, находим $k = -\frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9}$. Принимая теперь во внимание, что по истечении времени T от начала распада в куске породы осталось 100 мг урана, определяем T из соотношения $100 = 116{,}2e^{kT}$:

$$T = -\frac{1}{k}\ln 1{,}162 = \frac{4{,}5 \cdot 10^9}{\ln 2}\ln 1{,}162 \approx 970 \cdot 10^6 \text{ лет}$$

— возраст горной породы. ►

47. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглощает слой толщиной в 2 м?

◀ Пусть $I(z)$ — количество света, прошедшего слой воды толщиной z (рис. 11). Тогда согласно условию $I(z+\Delta z)-I(z)$ — количество поглощенного света — равно $kI(z)\Delta z$ ($k = \text{const}$). Таким образом, для количества прошедшего света $I(z)$ имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dI}{dz} = kI.$$

Его решение — $I(z) = I(0)e^{kz}$. Из условия $I(35) = \frac{1}{2}I(0)$ вытекает, что $k = -\frac{1}{35}\ln 2$. Поэтому $I(z) = I(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{z}{35}}$, где z измеряется в см. Полагая в последнем соотношении $z = 2\,\text{м} = 200\,\text{см}$, получаем $\frac{I(200)}{I(0)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{7}}$. Тогда

$$\frac{I(0)-I(200)}{I(0)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{7}} \approx 0{,}98.$$

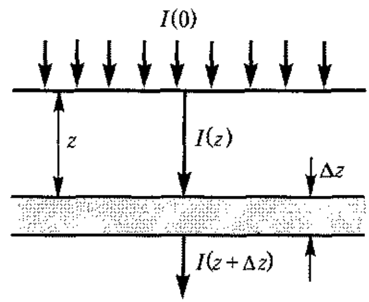

Рис. 11

Таким образом, поглощается 98% падающего на поверхность света. ▶

48. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/с. Изменением плотности пренебречь. Сопротивление пропорционально квадрату скорости.

◀ Согласно второму закону Ньютона имеем

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad (k > 0),$$

где m — масса парашютиста, $g \approx 10\,\text{м/с}^2$ — ускорение свободного падения, $k = \text{const}$. Разделяя переменные v и t и интегрируя, получим

$$\frac{dv}{g-k_0v^2} = dt, \quad \frac{1}{2\sqrt{k_0g}}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = t + \ln C, \quad a = \sqrt{\frac{g}{k_0}}, \quad k_0 = \frac{k}{m},$$

или

$$\left|\frac{a+v}{a-v}\right| = Ce^{\alpha t}, \quad \alpha = 2\sqrt{\frac{kg}{m}}. \tag{1}$$

Так как $v(0) = 0$, то $C = 1$. Далее, из условия $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\frac{a+v(t)}{a-v(t)}\right| = +\infty$ следует, что $v(t) \to a$ при $t \to +\infty$. Но по условию задачи $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 50\,\text{м/с}$, поэтому $a = 50$, или $\sqrt{\frac{mg}{k}} = 50$. Следовательно, $k = \frac{mg}{2500}$, $\alpha = 0{,}4$.

Принимая во внимание естественное условие $0 \leqslant v < a$, из (1) находим

$$v(t) = 50\,\text{th}(0{,}2t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

Интегрируя, получаем

$$s(t) = 250\ln\text{ch}(0{,}2t) + s_0. \tag{2}$$

Используя начальное условие $s(0) = 0$, имеем $s_0 = 0$. Полагая далее в (2) $s = 1000$, имеем $1000 = 250\ln\text{ch}(0{,}2t_1)$. Из последнего равенства определяем время t_1 падения парашютиста до раскрытия парашюта:

$$t_1 = 5\ln\left(e^4 + \sqrt{e^8-1}\right) \approx 5(\ln 2 + 4) \approx 23\,\text{с}. ▶$$

49. Футбольный мяч весом 0,4 кГ[1)] брошен вверх со скоростью 20 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,48 Г при скорости 1 м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема. Как изменятся эти результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха?

◀ По второму закону Ньютона имеем

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^2. \tag{1}$$

В нашем случае $m = \frac{P}{g} = \frac{0{,}4}{10}$, $k = 0{,}00048\,\frac{\text{кГ}\cdot\text{с}^2}{\text{м}^2}$, поэтому уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = -10 - 0{,}012v^2.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$\operatorname{arctg}\sqrt{0{,}0012}v = \sqrt{0{,}12}(C-t), \quad v = \frac{10}{\sqrt{0{,}12}}\operatorname{tg}\left((C-t)\sqrt{0{,}12}\right). \tag{2}$$

Так как $v(0) = 20$, то из (2) следует, что $C = \frac{1}{\sqrt{0{,}12}}\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{0{,}12}\right)$. Из (2) также следует, что $v = 0$ при $t = C \approx 1{,}75$ с (это, очевидно, соответствует наибольшей высоте). Принимая во внимание равенство $v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, после подстановки его в (2) и интегрирования полученного дифференциального уравнения, имеем

$$s(t) = s_0 + \frac{250}{3}\ln\left|\cos\left((C-t)\sqrt{0{,}12}\right)\right|, \quad s_0 = \text{const}. \tag{3}$$

Формула (3) выражает закон движения мяча. Полагая в (3) $s(0) = 0$, находим

$$s_0 = -\frac{250}{3}\ln\left|\cos\left(C\sqrt{0{,}12}\right)\right|.$$

Если же в (3) положить $t = C$, то получим наибольшую высоту подъема мяча

$$s_{\max} = s_0 \approx \frac{125}{3}\ln 1{,}48 \approx 16{,}3\,\text{м}.$$

Случай $k = 0$ предоставляем разобрать читателю. ▶

50. Пусть жидкость вытекает из некоторого сосуда через отверстие в нем со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g = 10\,\text{м/с}^2$, h — высота уровня жидкости над отверстием.

За какое время вся жидкость вытечет из цилиндрического бака с диаметром $2R = 1{,}8$ м и высотой $H = 2{,}45$ м через отверстие в дне диаметром $2r = 6$ см? Ось цилиндра вертикальная.

◀ Пусть $h(t)$ — высота уровня жидкости в баке в момент времени $t > 0$. Через промежуток времени Δt уровень жидкости понизится до значения $h(t+\Delta t)$. Следовательно, из бака вытечет количество жидкости, равное $(h(t) - h(t+\Delta t))\pi R^2$. С другой стороны, через отверстие в баке вытечет $\pi r^2 v(t_1)\Delta t$ жидкости, где $t_1 \in (t, t+\Delta t)$, $v(t_1)$ — некоторое промежуточное значение скорости вытекания жидкости на интервале $(t, t+\Delta t)$. В силу закона сохранения массы имеем равенство:

$$h(t+\Delta t) - h(t) = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 v(t_1)\Delta t.$$

Разделив обе части этого равенства на Δt и предположив, что функция h дифференцируема, а функция v непрерывная, устремим Δt к нулю. Тогда получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dh}{dt} = -k^2 v(t), \quad k = \frac{r}{R}, \quad v = 0{,}6\sqrt{2gh}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$h(t) = (C - 0{,}3\sqrt{2g}k^2 t)^2, \quad C = \text{const}.$$

[1)] Через Г (грамм-сила) обозначается техническая единица силы, $1\,\text{Г} = 1\,\text{г}\cdot g \approx 0{,}0098$ Н, где $g = 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ — ускорение свободного падения; 1 кГ = 1000 Г.

Поскольку $h(0) = H$, то отсюда следует, что $C = \sqrt{H}$. Очевидно, $h(t) = 0$ при

$$t = \frac{10\sqrt{H}}{3\sqrt{2g}} \frac{R^2}{r^2} \approx 1050\,\text{с} = 17{,}5\,\text{мин.} ►$$

51. Решить предыдущую задачу в предположении, что ось цилиндра расположена горизонтально, а отверстие находится в самой нижней части цилиндра.

◄ Как видим из рис. 12, при понижении уровня жидкости за время Δt на Δh через отверстие E вытечет $2H\sqrt{h(2R-h)}\Delta h + o(\Delta h)$ жидкости. Поэтому выполняется равенство

$$-2H\sqrt{h(2R-h)}\Delta h + o(\Delta h) = \pi r^2 v(t_1)\Delta t,$$

из которого, как и в предыдущем примере, получаем дифференциальное уравнение

$$-2H\sqrt{h(2R-h)}dh = \pi r^2 0{,}6\sqrt{2gh}\,dt, \quad h \not\equiv 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$h(t) = 2R - (0{,}3t + C)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3\pi r^2\sqrt{g}}{\sqrt{2}H}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad C = \text{const}. \qquad (1)$$

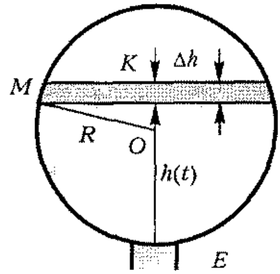

Рис. 12

Поскольку $h(0) = 2R$, то отсюда следует, что $C = 0$. Полагая в (1) $h = 0$, находим время, за которое вытечет вся жидкость:

$$t_1 = \frac{40}{9\pi} \frac{R^{\frac{3}{2}}H}{r^2\sqrt{g}} \approx 1040\,\text{с.} ►$$

52. Воронка имеет форму кругового конуса радиуса $R = 6$ см и высоты $H = 10$ см, обращенного вершиной вниз. За какое время из воронки вытечет вся вода через круглое отверстие диаметра 0,5 см, сделанное в вершине конуса?

◄ Из рис. 13 видим, что количество воды ΔV, содержащееся в заштрихованном слое, с точностью до малых $o(\Delta h)$ равно $\pi r^2 \Delta h$. С другой стороны, через отверстие O вытечет $\pi r_1^2 v(t_1)\Delta t$ воды. Таким образом, имеем равенство

$$-\pi r^2 \Delta h = \pi r_1^2 v(t_1)\Delta t + o(\Delta h),$$

где $r_1 = 0{,}25$ см, $t_1 \in (t, t+\Delta t)$, из которого предельным переходом при $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$r^2\,dh + r_1^2 v(t)\,dt = 0, \quad v(t) = 0{,}6\sqrt{2gh}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников AMO и CO_1O следует соотношение $r = \frac{hR}{H}$. Поэтому уравнение (1) записываем в виде

$$h^{\frac{3}{2}}\,dh + k^2\,dt = 0, \quad k^2 = 0{,}6\frac{H^2}{R^2} r_1^2\sqrt{2g}.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} + k^2 t = \widetilde{C}, \quad \widetilde{C} = \text{const}.$$

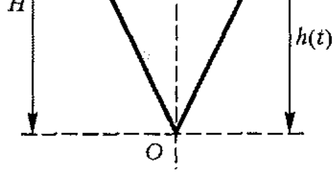

Рис. 13

Так как $h(0) = H$, то отсюда следует, что $\widetilde{C} = \frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}$. Таким образом, решение поставленной задачи имеет вид

$$h^{\frac{5}{2}} - H^{\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2}k^2 t.$$

Полагая здесь $h = 0$, находим

$$t = \frac{2}{5}\frac{H^{\frac{5}{2}}}{k^2}$$

— время, за которое вытечет вся вода из воронки. Вычисления дают $t \approx 27$ с. ►

53. В прямоугольный бак размером 60 см × 75 см и высотой 80 см поступает 1,8 л воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью $S = 2{,}5\,\text{см}^2$. За какое время наполнится бак?

◀ Пусть $h(t)$ — высота уровня воды в баке. Тогда $\Delta V_1 = (h(t+\Delta t) - h(t))\,60\cdot 75$ — приращение ее объема за время от t до $t+\Delta t$. Это увеличение (или уменьшение) объема происходит за счет поступления ΔV_2 воды и ее утечки в количестве ΔV_3 через отверстие. Таким образом, имеем уравнение $\Delta V_1 = \Delta V_2 - \Delta V_3$. Поскольку $\Delta V_2 = 1800\Delta t$, $\Delta V_3 = 2{,}5\cdot 0{,}6\sqrt{2gh(t_1)}\Delta t$, $t_1 \in (t, t+\Delta t)$, то последнее уравнение можно представить в виде

$$4500(h(t+\Delta t) - h(t)) = 1800\Delta t - 2{,}5\cdot 0{,}6\sqrt{2gh(t_1)}\Delta t, \quad g = 10^3\,\text{см/с}^2. \tag{1}$$

Разделив в (1) обе части на Δt и совершив предельный переход при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$30\,\frac{dh}{dt} = \left(12 - 0{,}01\sqrt{2gh}\right),$$

проинтегрировав которое, найдем:

$$t + C = -\frac{6000}{\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h} + \frac{1200}{\sqrt{2g}}\ln(12 - 0{,}01\sqrt{2gh})\right). \tag{2}$$

Пусть $h(0) = 0$, тогда из (2) следует, что $C = -3600\ln 12$. Подставив в (2) $h = 80$, найдем время t_1, за которое наполнится бак:

$$t_1 = 1200\left(3\ln\frac{3}{2} - 1\right) \approx 260\ \text{с}. ▶$$

54. Резиновый шнур длиной 1 м под действием силы f кГ удлиняется на kf метров. На сколько удлинится такой же шнур длины l и веса P под действием своего веса, если его подвесить за один конец?

◀ Пусть $U(x)$ — удлинение шнура длиной x, а $U(x+\Delta x)$ — удлинение шнура длиной $x+\Delta x$. Тогда удлинение элемента длиной Δx равно разности $U(x+\Delta x) - U(x)$ (рис. 14). На элемент шнура Δx действует растягивающая сила f, равная весу шнура длиной $l - x - \theta\Delta x$, т. е.

$$f = \frac{P}{l}(l - x - \theta\Delta x),$$

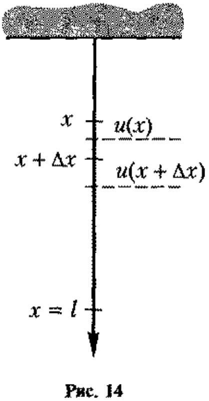

Рис. 14

где $\frac{P}{l}$ — удельный вес шнура, $0 < \theta < 1$. Согласно условию, указанный элемент должен удлиниться на $kf\Delta x$ метров. Таким образом, получаем уравнение

$$U(x+\Delta x) - U(x) = k\,\frac{P}{l}(l - x - \theta\Delta x)\Delta x, \tag{1}$$

где величина θ введена с целью учета влияния силы, действующей на элемент Δx, обусловленной весом самого элемента. Далее, известным путем из (1) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dU}{dx} = \frac{kP}{l}(l - x),$$

из которого следует, что

$$U(x) = C + \frac{kP}{2l}(2l - x)x.$$

Поскольку $U(0) = 0$, то $C = 0$. Следовательно,

$$U(x) = \frac{kP}{2l}(2l - x)x.$$

Из последней формулы получаем удлинение шнура длиной l:

$$U(l) = \frac{kPl}{2}. ▶$$

55. Найти атмосферное давление на высоте h, если на поверхности Земли давление равно $1\,кГ/см^2$ и плотность воздуха $0{,}0012\,г/см^3$.

◄ Пусть $P(z)$ — давление воздуха на высоте z от поверхности Земли. Тогда разность давлений $P(z) - P(z + \Delta z)$ равна весу столбика воздуха с площадью основания $1\,см^2$ и высотой Δz, т. е. равна величине $\rho(z + \theta\Delta z)g \cdot \Delta z$, где ρ — некоторая средняя плотность воздуха, $0 < \theta < 1$. Поэтому имеем

$$P(z) - P(z + \Delta z) = \rho(z + \theta\Delta z)g \cdot \Delta z,$$

откуда предельным переходом при $\Delta z \to 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP}{dz} = -g\rho(z). \tag{1}$$

Согласно закону Бойля—Мариотта, плотность воздуха при постоянной температуре пропорциональна давлению, т. е.

$$\rho(z) = kP(z).$$

Используя это равенство, из (1) находим

$$\frac{dP}{P} = -kg, \quad P = P_0 e^{-kgz}\,кГ/см^2.$$

Так как при $z = 0$ $P = 1\,кГ/см^2$, то $P = e^{-kgz}$, а поскольку

$$0{,}0012\,г/см^3 = 1000\,Г/см^2 \cdot k = 1000\,г/см^2\,gk,$$

где $g = 9{,}8\,м/с^2 = \frac{1\,Г}{1\,г}$ — ускорение свободного падения, то $kg = 0{,}12 \cdot 10^{-5}\,см^{-1} = 0{,}12(км)^{-1}$ Таким образом, на высоте h км давление воздуха

$$P = e^{-0{,}12h}\,кГ/см^2. ►$$

56. Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен $\frac{1}{3}$, и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой $10\,кГ$?

◄ Пусть $T(\varphi)$ — сила натяжения каната, соответствующая его углу наматывания φ на столб, ΔP — нормальная реакция столба на участок каната длиной $\Delta S = R\Delta\varphi$ (рис. 15). Из условия равновесия трех сил $T(\varphi)$, ΔP и $T(\varphi + \Delta\varphi)$, с точностью до бесконечно малых величин угла $\Delta\varphi$, следуют равенства

$$\begin{aligned} T(\varphi + \Delta\varphi)\Delta\varphi + o(\Delta\varphi) &= \Delta P, \\ T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) + o(\Delta\varphi) &= \Delta F, \end{aligned} \tag{1}$$

где ΔF — сила трения, действующая на указанный элемент. Согласно условию, $\Delta F = k\Delta P$, поэтому из (1) получаем соотношение

$$T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) = kT(\varphi + \Delta\varphi)\Delta\varphi + o(\Delta\varphi),$$

из которого известным читателю способом легко получить дифференциальное уравнение

$$\frac{dT}{d\varphi} = kT.$$

Его решение — $T = T_0 e^{k\varphi}$. Пусть при $\varphi = 0$ $T_0 = 10\,кГ$. Тогда при $\varphi = 6\pi$ (что соответствует трем виткам)

$$T = 10e^{2\pi} \approx 5355\,кГ. ►$$

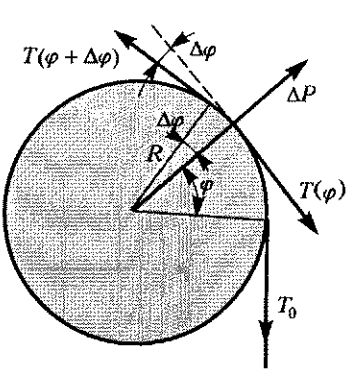

Рис. 15

57. На вращающийся в жидкости диск действует замедляющая его движение сила трения, пропорциональная угловой скорости вращения. Найти зависимость угловой скорости от времени, если вначале диск вращался со скоростью 100 оборотов в минуту, а по истечении одной минуты — 60 оборотов в минуту.

◀ Пусть $\omega(t)$ — угловая скорость движения диска. Тогда, согласно закону изменения момента количества движения, имеем

$$I\frac{d\omega}{dt} = M, \tag{1}$$

где I — момент инерции диска, M — момент сил, действующих на диск. По условию $M = k_0\omega$ ($k_0 = \text{const}$), поэтому уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d\omega}{dt} = k\omega, \quad k = \frac{k_0}{I}.$$

Его решение — $\omega = \omega_0 e^{kt}$. Пусть ω измеряется в оборотах за минуту, а время t — в минутах. Тогда $\omega_0 = 100$, $60 = 100e^k$, откуда $e^k = 0{,}6$. Таким образом, требуемая зависимость имеет вид

$$\omega = 100(0{,}6)^t \text{ об/мин. ▶}$$

58. В закрытом помещении объемом V м^3 находится открытый сосуд с водой. Скорость испарения воды пропорциональна разности между количеством q_1 водяного пара, насыщающего 1 м^3 воздуха при данной температуре, и количеством q водяного пара, имеющимся в 1 м^3 воздуха в рассматриваемый момент (считаем, что температура воздуха и воды, а также величина площади, с которой происходит испарение, остаются неизменными). В начальный момент в сосуде было m_0 г воды, а в 1 м^3 воздуха q_0 г пара. Сколько воды останется в сосуде через промежуток времени t?

◀ Пусть $Q(t)$ — количество испарившейся воды в граммах за время t. Тогда, согласно условию, скорость испарения $\frac{dQ}{dt}$ равна величине $k(q_1 - q)$, т. е. имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ}{dt} = k(q_1 - q), \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Найдем значение q. Очевидно, что

$$\left(V - m_0 \cdot 10^{-6}\right) q_0 = Q_1$$

есть количество пара в граммах, которое было в помещении, а

$$\left(V - m_0 \cdot 10^{-6}\right) q_0 + Q = Q_2$$

— количество пара в граммах в помещении в момент времени t. Ясно, что количество Q_2 было равномерно распределено в объеме

$$V_2 = V - m_0 \cdot 10^{-6} + Q \cdot 10^{-6}$$

(число 10^{-6} везде фигурирует вследствие того, что 1 г воды занимает 1 см^3 = 10^{-6} м^3 объема). Поэтому

$$q = \frac{Q_2}{V_2} = \frac{\left(V - m_0 10^{-6}\right) q_0 + Q}{V - 10^{-6}(m_0 + Q)}. \tag{2}$$

Если $V \gg 10^{-6}(m_0 + Q)$, то из (2) можно получить более простую формулу для q:

$$q = \frac{Vq_0 + Q}{V} = q_0 + \frac{Q}{V}. \tag{3}$$

Подставив (3) в (1), получим окончательное дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ}{dt} = k\left(q_1 - q_0 - \frac{Q}{V}\right),$$

проинтегрировав которое, получим:

$$Q(t) = V(q_1 - q_0) + Ce^{-\frac{kt}{V}}.$$

Поскольку $Q(0) = 0$, то отсюда следует, что $C = -V(q_1 - q_0)$. Таким образом, для оставшейся в сосуде воды имеем формулу

$$m_1(t) = m_0 - V(q_1 - q_0)\left(1 - e^{-\frac{kt}{V}}\right). \text{ ▶}$$

59. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива она равна m, скорость истечения из ракеты продуктов горения равна c, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха.

◀ Пусть $M(t)$, $v(t)$ соответственно масса и скорость ракеты в момент времени t. Тогда $k(t) = M(t)v(t)$ есть количество движения ракеты. По закону сохранения количества движения справедливо равенство

$$k(t+\Delta t) - k(t) = \Delta p, \tag{1}$$

где p — импульс внешних сил, действующих в течение времени Δt на промежутке времени от t до $t + \Delta t$. В данном случае таким импульсом служат продукты сгорания ракеты, которые отделяются от нее с абсолютной скоростью $c - v(t)$ (c — относительная скорость отделения продуктов сгорания). Поскольку отделяется (сгорает) масса $M(t) - M(t + \Delta t)$, то

$$\Delta p = (c - v(t))(M(t) - M(t + \Delta t)). \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), получим

$$M(t+\Delta t)v(t+\Delta t) - M(t)v(t) = (c - v(t))(M(t) - M(t+\Delta t)),$$

или

$$M\Delta v + c\Delta M + o(\Delta v) = 0.$$

Разделив полученное на Δv и устремив Δv к нулю, имеем

$$M + c\,\frac{dM}{dv} = 0.$$

Решение полученного дифференциального уравнения имеет вид

$$v(t) = c\ln\frac{1}{M(t)} + c_0. \tag{3}$$

Постоянную c_0 определяем из начального условия: $v(t)|_{t=0} = 0$, т. е. в начальный момент времени или, что то же самое, при $M(t) = M$ скорость v равна нулю. Поэтому из (3) имеем $c_0 = -c\ln\frac{1}{M}$. Следовательно,

$$v = c\ln\frac{M}{M(t)} = c\ln\frac{M}{M - x},$$

где x — сгоревшая масса топлива. Если, в частности, сгорит все топливо, т. е. $x = M - m$, то ракета будет иметь скорость

$$v = c\ln\frac{M}{m} \quad \text{— \textit{формула Циолковского.}} \ \blacktriangleright$$

§ 3. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

3.1. Однородное уравнение.

Уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{1}$$

где M, N — непрерывные в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ и однородные функции одной и той же степени, называется *однородным*.

Напомним, что функция ψ называется *однородной степени* m (m — действительное число), если $\forall t \in (a, b)$ $\psi(tx, ty) \equiv t^m\psi(x, y)$, $(x, y) \in D$.

С помощью замены $y = x \cdot U(x)$ уравнение (1) сводится к уравнению с разделяющимися переменными x и U.

3.2. Уравнение, сводимое к однородному.

К однородному уравнению приводится следующее:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (a_i = \text{const},\ b_i = \text{const},\ i = 1, 2), \tag{2}$$

если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Для этого достаточно положить $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ и подобрать постоянные α, β таким образом, чтобы правая часть уравнения (2) приобрела вид $f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$. Если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$, $(k = \text{const})$. В этом случае уравнение (2) приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = a_2x + b_2y$.

3.3. Обобщенно-однородное уравнение.

Уравнение вида (1) называется *обобщенно-однородным*, если существует такая постоянная α, что после замены $y = z^\alpha$ оно становится однородным.

Решить уравнения.

60. $\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) dx - x\,dy = 0.$

◀ Здесь функции $M(x, y) = y + \sqrt{x^2 - y^2}$ $(|x| \geqslant |y|)$, $N(x, y) = -x$ однородные и имеют степень $m = 1$, так как

$$M(tx, ty) = ty + \sqrt{t^2(x^2 - y^2)} = t\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right) = tM(x, y)$$

для $t \geqslant 0$ (т. е. $a = 0$ и $b = +\infty$), а

$$N(tx, ty) = -tx = tN(x, y)$$

для любого t. Следовательно, данное уравнение однородное. Применив замену $y = xu$, получаем $dy = x\,du + u\,dx$, а уравнение преобразуется к виду

$$\left(xu + |x|\sqrt{1 - u^2}\right) dx - x(x\,du + u\,dx) = 0. \tag{1}$$

Очевидно, что $x = 0$ является решением исходного уравнения, поэтому считая, что в (1) $x \neq 0$, получим

$$\operatorname{sgn} x \sqrt{1 - u^2}\, dx - x\,du = 0.$$

Разделяя переменные и затем интегрируя, находим:

$$\frac{dx}{|x|} = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad \operatorname{sgn} x \ln|x| = \arcsin\frac{y}{x} + C.$$

Принимая еще во внимание, что $u = \pm 1$ (т. е. $y = \pm x$) также есть решения, окончательно записываем все решения данного уравнения:

$$\operatorname{sgn} x \ln|x| = \arcsin\frac{y}{x} + C; \quad y = \pm x; \quad x = 0. \ ▶$$

Замечание. *Строго говоря, решение $x = 0$ получается в результате допущения, что $\sqrt{-y^2} \cdot 0 = 0$ для произвольных значений y.*

61. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x).$

◀ Переписав уравнение в виде

$$x\,dy - y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right) dx = 0 \quad (x > 0,\ y > 0),$$

обнаруживаем, что функции $M(x, y) = -y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$ и $N(x, y) = x$ однородные одной и той же степени $m = 1$. Поэтому, применив замену $y = xu$, $dy = x\,du + u\,dx$, получим

$$x\,du - u\ln u\,dx = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\ln x - \ln|\ln u| = \ln C \quad (u \neq 1),$$

или
$$y = xe^{Cx}.$$
Заметим, что решение $y = x$, которое соответствует значению $u = 1$, входит в формулу семейства интегральных кривых при $C = 0$. ▶

62. $xy\,dx + (y^2 - x^2)\,dy = 0$, $M(1, 1)$.

◀ В данном примере требуется найти кривую, которая удовлетворяла бы дифференциальному уравнению и проходила через точку M.

Прежде всего, находим все решения этого уравнения. Полагая $y = xu$, получаем
$$u^3\,dx + x(u^2 - 1)\,du = 0.$$
Отсюда при $u \neq 0$ интегрированием находим
$$\int \frac{u^2 - 1}{u^3}\,du + \int \frac{dx}{x} = \ln C, \quad \ln|ux| + \frac{1}{2u^2} = \ln C,$$
или
$$x^2 + 2y^2 \ln \frac{|y|}{C} = 0. \tag{1}$$
К полученному семейству присоединим еще кривую $y = 0$. Далее, подставив в (1) $x = 1$, $y = 1$, имеем $C = e^{\frac{1}{2}}$. Поэтому требуемая кривая имеет уравнение
$$x^2 + y^2(\ln y^2 - 1) = 0. \;▶$$

63. $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2\right)\,dx - x^2 e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0$.

◀ Здесь удобно применить замену $x = uy$. Тогда $dx = u\,dy + y\,du$, $u\,dy + y\,(ue^u + 1)\,du = 0$,
$$\frac{dy}{y} + \frac{(ue^u + 1)\,du}{u} = 0, \quad \ln|x| + e^{\frac{x}{y}} = C. \;▶$$

64. $(2\sqrt{xy} - y)\,dx - x\,dy = 0$.

◀ Очевидно, $xy \geqslant 0$. Отбросив тривиальные решения $x = 0$, $y = 0$, считаем, что $xy > 0$. Полагая $y = ux$ $(u > 0)$, имеем
$$dy = u\,dx + x\,du, \quad 2\left(\sqrt{u}\,\mathrm{sgn}\,x - u\right)dx - x\,du = 0. \tag{1}$$
Если $x > 0$, то отсюда находим $(u \neq 1)$:
$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u} - u}, \quad \ln x = -\ln|1 - \sqrt{u}| + \ln C, \quad \text{или} \quad x\left|1 - \sqrt{\frac{y}{x}}\right| = C.$$
Если же $x < 0$, то полагая в (1) $x = -x_1$, получим
$$2\left(\sqrt{u} + u\right)\,dx_1 + x_1\,du = 0.$$
Разделяя переменные и интегрируя, имеем
$$x_1\left(1 + \sqrt{-\frac{y}{x_1}}\right) = C, \quad \text{или} \quad -x\left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) = C.$$
Объединяя оба ответа (при $x > 0$ и при $x < 0$) в один, окончательно можем записать
$$x - \sqrt{xy} = C. \tag{2}$$
Заметим, что решение $y = x$ $(u = 1)$ входит в (2) при $x > 0$ $(C = 0)$, а решение $y = 0$ вообще не входит. Поэтому все решения данного уравнения описываются формулой (2) с присоединением $y = 0$. Решение же $x = 0$ можно включить в (2) лишь формально, поскольку дифференциал $d\left(x - \sqrt{xy}\right)$ при $x = 0$ не существует. ▶

65. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$.

◀ Замена $y = xu$, $(u > 0,\ x \neq 0)$ приводит к уравнению
$$xu' = u(\cos\ln u - 1).$$

Считая, что $\ln u \neq 2k\pi$ ($u \neq e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$), получаем

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u(\cos \ln u - 1)}, \quad \ln(|x|C) = \int \frac{d(\ln u)}{\cos \ln u - 1} = \operatorname{ctg}\left(\ln \sqrt{u}\right),$$

или

$$\ln(Cx) = \operatorname{ctg} \ln \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Наконец, легко проверить, что $\forall k \in \mathbb{Z}$ функция $y = xe^{2k\pi}$, $x \neq 0$, также является решением исходного уравнения. ►

66. $(6x + y - 1)\,dx + (4x + y - 2)\,dy = 0.$

◄ Это уравнение вида (2), п. 3.2. В данном случае

$$a_1 = 6, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad b_2 = 1, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \neq 0.$$

Следовательно, можно применить замену $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$. При этом получим

$$dx = du, \quad dy = dv, \quad (6u + v + 6\alpha + \beta - 1)\,du + (4u + v + 4\alpha + \beta - 2)dv = 0.$$

Полученное уравнение приводится к однородному, если положить

$$6\alpha + \beta - 1 = 0, \quad 4\alpha + \beta - 2 = 0.$$

Решение этой системы имеет вид $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 4$. Таким образом, после замены $x = u - \frac{1}{2}$, $y = v + 4$ исходное уравнение приводится к однородному:

$$(6u + v)\,du + (4u + v)\,dv = 0.$$

Теперь воспользуемся уже известной заменой $u = v\xi$, $du = v\,d\xi + \xi\,dv$. Следовательно,

$$(6\xi + 1)v\,d\xi + (6\xi^2 + 5\xi + 1)dv = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, отсюда получаем $\left(\xi \neq -\frac{1}{2} \text{ и } \xi \neq -\frac{1}{3}\right)$:

$$\frac{6\xi + 1}{6\xi^2 + 5\xi + 1}\,d\xi + \frac{dv}{v} = 0, \quad \frac{1}{6}\int \frac{6\xi + 1}{6\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\left(\xi + \frac{1}{3}\right)}\,d\xi + \ln|v| = \ln C,$$

или

$$(2\xi + 1)^2 = C\,\frac{3\xi + 1}{v}.$$

Возвращаясь к переменным x и y, окончательно имеем

$$(2x + y - 3)^2 = C\left(3x + y - \frac{5}{2}\right).$$

Решения $2x + y - 3 = 0$ $\left(\xi = -\frac{1}{2}\right)$ и $3x + y - \frac{5}{2} = 0$ $\left(\xi = -\frac{1}{3}\right)$ можно включить в полученное семейство кривых соответственно при $C = 0$ и $C = \infty$. ►

67. $(5x - 7y + 1)\,dy + (x + y - 1)\,dx = 0.$

◄ Поскольку прямые $5x - 7y + 1 = 0$ и $x + y - 1 = 0$ не параллельны, то проводим замену

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta,$$

где постоянные α и β удовлетворяют системе уравнений

$$5\alpha - 7\beta + 1 = 0, \quad \alpha + \beta - 1 = 0.$$

из которой находим $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Таким образом, после замены $x = u + \frac{1}{2}$, $y = v + \frac{1}{2}$ получаем дифференциальное уравнение

$$(5u - 7v)\,dv + (u + v)\,du = 0.$$

Как и в предыдущем примере, пользуемся заменой $u = \xi v$. Тогда $du = v\,d\xi + \xi\,dv$, $(\xi^2 + 6\xi - 7) \times$ $\times\ dv + v(\xi + 1)\,d\xi = 0$. Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\int \frac{(\xi + 1)}{(\xi - 1)(\xi + 7)}\,d\xi + \ln(|v|C) = 0, \quad \frac{1}{4}\ln|\xi - 1| + \frac{3}{4}\ln|\xi + 7| + \ln|vC| = 0,$$

откуда

$$(\xi - 1)(\xi + 7)^3 v^4 = C \quad \text{или} \quad (x - y)(x + 7y - 4)^3 = C. \ ►$$

68. $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$.

◀ Так как прямые $2x + y + 1 = 0$ и $4x + 2y - 3 = 0$ параллельны, то замену, которую производили в предыдущих примерах, здесь проводить нельзя. Однако, в силу того, что коэффициенты при переменных x и y пропорциональны, можем положить $z = 2x + y$. Тогда $dy = dz - 2\,dx$ и исходное уравнение принимает вид

$$5(z - 1)\,dx - (2z - 3)\,dz = 0.$$

Интегрируя это уравнение и возвращаясь к переменной y, получаем

$$2x + y - 1 = Ce^{2y-x}. ▶$$

69. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

◀ Посредством замены $x = u + 3$, $y = v - 2$ приходим к однородному уравнению

$$\frac{dv}{du} = 2\frac{v^2}{(u+v)^2}.$$

Применяя еще одну замену $v = u\xi(u)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$u\frac{d\xi}{du} = \frac{2\xi^2}{(1+\xi)^2} - \xi.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{\xi^2 + 2\xi + 1}{\xi(1+\xi^2)}\,d\xi = C, \quad \ln|u\xi| + 2\,\mathrm{arctg}\,\xi = C,$$

или (после возвращения к переменным x и y)

$$y + 2 = Ce^{-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y+2}{x-3}}. ▶$$

70. $(y' + 1)\ln\dfrac{y+x}{x+3} = \dfrac{y+x}{x+3}$.

◀ Замена $x = u - 3$, $y = v + 3$ приведет к однородному уравнению

$$\left(\frac{dv}{du} + 1\right)\ln\frac{u+v}{u} = \frac{u+v}{u},$$

применение к которому замены $v = u\xi(u)$ позволяет получить уравнение с разделяющимися переменными

$$(u\xi' + \xi + 1)\ln(1+\xi) = 1 + \xi, \quad u\xi'\ln(1+\xi) = (1+\xi)(1 - \ln(1+\xi)).$$

Разделяя в последнем уравнении переменные и интегрируя, находим:

$$\int \frac{du}{u} - \int \frac{\ln(1+\xi)\,d\xi}{(1+\xi)(1-\ln(1+\xi))} = \ln C,$$

или

$$\ln|u| + \ln(1+\xi) + \ln|1 - \ln(1+\xi)| = \ln C.$$

Отсюда, потенциируя и возвращаясь к старым переменным, окончательно имеем

$$\ln\frac{x+y}{x+3} = 1 + \frac{C}{x+y}. ▶$$

Замечание. Для решения уравнения (2), п. 3.2, применяют еще и замену

$$z = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2},$$

которая сразу приводит к уравнению с разделяющимися переменными. В данном случае можно воспользоваться указанной заменой. Тогда получим уравнение

$$(z + (x+3)z')\ln z = z, \quad \text{где} \quad z = \frac{y+x}{x+3},$$

откуда

$$\ln|x+3| + \ln z + \ln|1 - \ln z| = \ln C, \quad \ln\frac{x+y}{x+3} = 1 + \frac{C}{x+y}.$$

71. $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}$.

◀ Уравнение приводится к однородному с помощью замены $x = u - 1$, $y = v - 2$:

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u} + \operatorname{tg}\frac{v-2u}{u}.$$

Далее, как и в предыдущих примерах, применяем замену $v = u\xi(u)$. Тогда получим

$$u\xi' = \operatorname{tg}(\xi - 2).$$

Разделение переменных и интегрирование дает:

$$\frac{d\xi}{\operatorname{tg}(\xi-2)} = \frac{du}{u}, \quad \ln|u| - \ln|\sin(\xi-2)| = \ln C.$$

Потенциируя и возвращаясь к прежним переменным, окончательно имеем

$$x + 1 = C\sin\left(\frac{y-2x}{x+1}\right).$$

Заметим, что решения $x+1=0$ $(u=0)$ и $\frac{y-2x}{x+1} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $(\operatorname{tg}(\xi-2)=0)$ входят в полученное семейство решений соответственно при $C = 0$ и $C = \infty$. ▶

72. $x^3(y' - x) = y^2$.

◀ Уравнение не является однородным, однако, применив замену $y = (z(x))^\alpha$, замечаем, что уравнение

$$\alpha z^{\alpha-1}x^3\,dz = \left(z^{2\alpha} + x^4\right)dx \tag{1}$$

приводится к однородному, если выбрать $\alpha = 2$. Полагая в (1) $z = xu$, имеем

$$(u^2-1)^2\,dx = 2ux\,du.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\ln|x| + \frac{1}{u^2-1} = C,$$

или

$$\ln|x| + \frac{x^2}{y-x^2} = C. \;▶ \tag{2}$$

Замечание. В данном случае мы получили решение для $y \geqslant 0$, поскольку $y = z^2 \geqslant 0$. Аналогично можно установить, что и для $y = -z^2 \leqslant 0$ семейство решений описывается формулой (2). Решение $y = x^2$ входит в это семейство при $C = \infty$.

73. $2x^2y' = y^3 + xy$.

◀ Положим $y = z^\alpha$. Тогда получим

$$2\alpha x^2 z^{\alpha-1}z' = z^{3\alpha} + xz^\alpha,\; 2\alpha x^2 z^{\alpha-1}\,dz - \left(z^{3\alpha} + xz^\alpha\right)dx = 0.$$

Отсюда следует, что функции $2\alpha x^2 z^{\alpha-1}$ и $z^{3\alpha} + xz^\alpha$ однородны лишь при одном условии: $\alpha + 1 = 3\alpha = \alpha + 1$, т. е. при $\alpha = \frac{1}{2}$. Таким образом, в случае $y \geqslant 0$ применяем замену $y = \sqrt{z}$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$x^2\,dz - (z+x)z\,dx = 0.$$

Замена $z = xu(x)$ преобразует последнее уравнение в уравнение с разделяющимися переменными $x\,du - u^2\,dx = 0$. Интегрируя его, получаем $\frac{1}{u} + \ln|x| = C$, или

$$\frac{x}{y^2} + \ln|x| = C.$$

Решение $y = 0$ входит в полученное семейство при $C = \infty$. ▶

Замечание 1. В рассмотренном, и в некоторых других примерах мы включали "потерянные" решения в семейство интегральных кривых при сингулярных значениях C. Однако такое включение вызвано не существом дела, а лишь формой записи решения. Покажем это на последнем примере. Имеем

$$x + y^2\ln|x| = Cy^2, \quad \frac{1}{C}(x + y^2\ln|x|) = y^2, \quad C_1(x + y^2\ln|x|) = y^2, \quad C_1 = \frac{1}{C}.$$

Положив в последней формуле $C_1 = 0$, получим $y \equiv 0$.

Замечание 2. Замена $y = -\sqrt{z}$ (для $y \leqslant 0$) приводит к такому же результату.

74. $y\,dx + x(2xy+1)\,dy = 0$.

◀ Применив замену $y = z^\alpha$, получим уравнение

$$z^\alpha\,dx + x(2xz^\alpha + 1)\alpha z^{\alpha-1}\,dz = 0.$$

Так как функции z^α и $\alpha x z^{\alpha-1}(2xz^\alpha + 1)$ однородны и имеют одну и ту же степень при $\alpha = -1$, то данное уравнение приводится к однородному с помощью замены $y = \frac{1}{z}$. Однако его можно привести к уравнению с разделяющимися переменными, если воспользоваться заменой $y = \frac{u(x)}{x}$ (в общем случае заменой $y = x^\alpha u(x)$).

Таким образом, получим уравнение

$$-2u^2\,dx + x(2u+1)\,du = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} + \frac{du}{2u^2}, \quad \ln\left|\frac{x}{u}\right| + \frac{1}{2u} = \ln C,$$

или

$$2xy = \frac{1}{\ln C|y|}, \quad y^2 e^{-\frac{1}{xy}} = C.$$

Заметим, что последняя форма записи решений исключает такие, как $x = 0$ и $y = 0$, в то время как ей предшествующая включает решение $x = 0$ (при $C = \infty$). Легко показать, что никакие преобразования формулы семейства интегральных кривых не позволяют включить в их состав решение $y = 0$. ▶

75. $2y' + x = 4\sqrt{y}$.

◀ Проверка на обобщенную однородность данного уравнения показывает, что показатель однородности $\alpha = 2$. Следовательно, замена $y = x^2 u(x)$ $(u \geqslant 0)$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$2x\,du + (1 + 4u - 4\sqrt{u})\,dx = 0 \quad (x \geqslant 0). \tag{1}$$

Проинтегрировав его, получим:

$$x(1 - 2\sqrt{u}) = Ce^{\frac{1}{2\sqrt{u}-1}}, \quad u = \frac{1}{4},$$

или

$$(x - 2\sqrt{y})e^{\frac{x}{x-2\sqrt{y}}} = C, \quad y = \frac{x^2}{4}.$$

Если же $x < 0$, то вместо уравнения (1) получим уравнение

$$2x\,du + (1 + 4u + 4\sqrt{u})\,dx = 0,$$

интегрирование которого приводит к уже полученному результату для уравнения (1). ▶

76. $2\left(\sqrt{x^4y^2+1} - x^2y\right)dx - x^3\,dy = 0$.

◀ Полагая $y = z^\alpha$, получаем уравнение

$$2\left(\sqrt{x^4z^{2\alpha}+1} - x^2z^\alpha\right)dx - \alpha x^3 z^{\alpha-1}\,dz = 0.$$

Отсюда следует, что функции при дифференциалах однородны и имеют одинаковую степень только при $\alpha = -2$. Поэтому замена $y = \frac{u(x)}{x^2}$ приводит к уравнению

$$2\sqrt{u^2+1}\,dx - x\,du = 0,$$

откуда находим

$$x^2 = C\left(u + \sqrt{u^2+1}\right), \quad \text{или} \quad x^2 = C\left(x^2y + \sqrt{1+x^4y^2}\right). \ ▶$$

77. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

◀ Согласно условию задачи, $|OK| = |KM|$ (рис. 16). Поэтому $\alpha = 2\beta$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}$. Но $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x}$, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

Принимая во внимание геометрический смысл производной, окончательно получаем

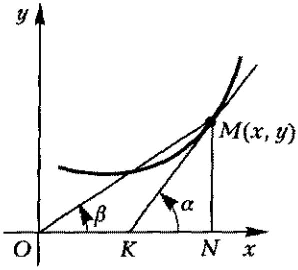

Рис. 16

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Это однородное уравнение и для его решения произведем замену $y = xu(x)$. При этом имеем

$$xu' + u = \frac{2u}{1-u^2}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{1-u^2}{u+u^3}\,du.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{x}{u}(u^2+1) = C, \quad \text{или} \quad x^2+y^2 = Cy. \ ▶$$

78. Найти кривую, у которой расстояние до любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

◀ Из рис. 17 видим, что треугольники ONM и OML конгруэнтны, поскольку по условию $|ON| = |OL|$ и гипотенуза OM — общая. Следовательно, углы $\widehat{MOL}$ и $\widehat{MON}$ равны друг другу.

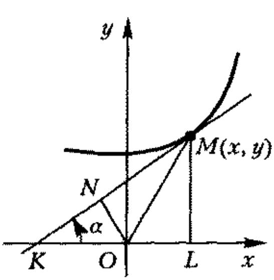

Рис. 17

Но $\widehat{KON} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, поэтому $\widehat{MOL} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$. Далее, из треугольника OLM имеем

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{y-x}{y+x}$. Наконец, используя формулу $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ и соотношение $\operatorname{tg}\alpha = y'$, получаем дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}.$$

Применив замену $y = xu(x)$, имеем

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u\,du}{u^2+1} = 0, \quad \ln|x| + \ln(u^2+1) = \ln C,$$

откуда следует, что $x^2+y^2 = Cx$. ▶

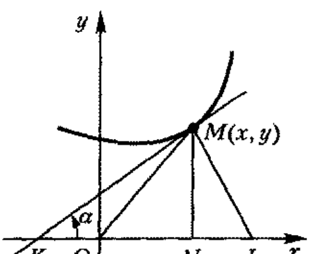

Рис. 18

79. Найти кривые, у которых поднормаль равна разности между модулем радиуса-вектора кривой и абсциссой точки касания.

◀ По условию $|NL| = |OM| - |ON|$ (рис. 18). Поскольку

$$|NL| = y\operatorname{tg}\alpha, \quad |OM| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad |ON| = x,$$

то

$$yy' = \sqrt{x^2+y^2} - x.$$

Поскольку это дифференциальное уравнение однородное, то применяем замену $y = xu(x)$. Имеем (для $x > 0$):

$$\frac{2\,dx}{x} = \frac{du^2}{\sqrt{u^2+1}-1-u^2}, \quad 2\int\frac{dx}{x} = \int\frac{du^2}{\sqrt{u^2+1}-1-u^2} + C,$$

$$x(1-z) = C, \quad \text{где} \quad z = \sqrt{u^2+1}.$$

Таким образом, искомое семейство кривых имеет вид

$$x - \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

Случай $x < 0$ предоставляем разобрать читателю. ▶

80. Найти кривую, зная, что треугольник, образованный нормалью к ней и осями координат, равновелик треугольнику, образованному осью Ox, касательной и нормалью к этой же кривой.

◀ По условию, треугольники KMN и OLN (рис. 19) равновелики, поэтому равновелики также треугольники KOP и PML. Поскольку последние еще и подобны, то они конгруэнтны. Следовательно, $|OP| = |PM|$. Из уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$, где X, Y — текущие координаты точки, лежащей на касательной, следует, что

$$|PO| = y - y'x.$$

Длину отрезка PM находим по формуле расстояния между точками $M(x, y)$ и $P(0, |PO|)$:

$$|PM| = \sqrt{x^2 + y'^2 x^2}.$$

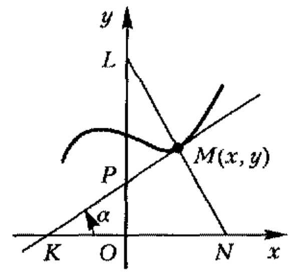

Рис. 19

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$(y - y'x)^2 = x^2 + y'^2 x^2, \quad \text{или} \quad y^2 - 2yy'x - x^2 = 0.$$

Полученное уравнение однородное, поэтому воспользуемся заменой $y = xu(x)$, которая после ее проведения дает возможность разделить переменные. Имеем

$$u^2 + 2uu'x + 1 = 0,$$

откуда интегрированием находим:

$$x(1 + u^2) = 2C, \quad \text{или} \quad (x - C)^2 + y^2 = C^2. ▶$$

81. При каких α и β уравнение $y' = ax^\alpha + by^\beta$ приводится к однородному с помощью замены $y = z^m$?

◀ Применив указанную замену, получим

$$mz^{m-1}z' = ax^\alpha + bz^{m\beta} \quad (m \neq 0). \tag{1}$$

Отсюда следует, что если a и b отличны от нуля, то для однородности уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения равенств

$$m - 1 = \alpha = m\beta.$$

Из второго равенства имеем $m = \frac{\alpha}{\beta}$, $(\beta \neq 0,\ \alpha \neq 0)$. Подставив m в первое равенство, получим искомую связь:

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = 1. ▶$$

82. Доказать, что интегральные кривые уравнения

$$(ax + by + c)\,dx + (ay - bx + c_1)\,dy = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

являются логарифмическими спиралями.

◀ С помощью формул параллельного переноса системы координат

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta$$

приводим данное уравнение к виду

$$(au + bv)\,du + (av - bu)\,dv = 0.$$

Далее полагаем $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$, где ρ, φ — полярные координаты с полюсом в точке (α, β) относительно системы Oxy. Имеем

$$a\rho' = b\rho,$$

откуда находим

$$\rho = Ce^{\frac{b}{a}\varphi}.$$

Получили семейство логарифмических спиралей. ▶

Замечание. Если $a = b = 0$, то получим семейство прямых. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то также получается семейство прямых. Если $b = 0$, $a \neq 0$, то получим семейство окружностей. Все эти случаи следуют непосредственно из данного уравнения.

83. Найти форму зеркала, отражающего все лучи, которые выходят из одной и той же точки, параллельно данному направлению.

◀ На рис. 20 показано, что $\widehat{OMN} = \widehat{NMS}$ (угол падения луча OM равен углу отражения луча MS). Выберем направление отраженных лучей параллельно оси Ox. Тогда, исходя из указанного выше равенства углов и параллельности луча MS оси Ox, имеем

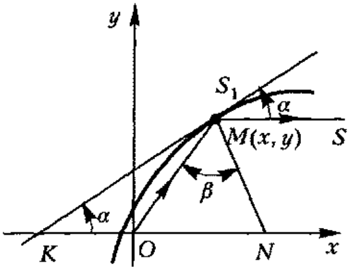

Рис. 20

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{KMO} = \alpha.$$

Следовательно, треугольник KMO — равнобедренный, т. е. $|KO| = |OM|$. Очевидно, $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Длину отрезка KO можно найти, вычислив абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox. Из уравнения касательной к искомой кривой

$$Y = y + y'(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты касательной, находим требуемую абсциссу:

$$X = x - \frac{y}{y'}.$$

Тогда $|KO| = -X$. Таким образом, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Это уравнение однородное и с помощью замены $y = xu(x)$, опуская простые выкладки, получаем его решения

$$y^2 - 2Cx - C^2 = 0,$$

геометрически представляющие собой семейство парабол ($C \neq 0$). ▶

84. Пусть k_0 — корень уравнения $f(k) = k$. Показать, что:

1) если $f'(k_0) < 1$, то ни одно решение уравнения $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, за исключением решения $y = k_0x$, не касается прямой $y = k_0x$ в начале координат;

2) если $f'(k_0) > 1$, то этой прямой касается бесконечно много решений.

◀ Применим метод доказательства от противного. Пусть при выполнении условий $f(k_0) = k_0$, $f'(k_0) < 1$ существует решение уравнения $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, касающееся прямой $y = k_0x$ в начале координат. Тогда в малой окрестности начала координат оно представляется в виде

$$y(x) = k_0x + x\delta(x), \tag{1}$$

где $\delta(x) \to 0$ при $x \to 0$. Подставив (1) в рассматриваемое уравнение, получаем

$$k_0 + x\delta' + \delta = f(k_0 + \delta(x)) = f(k_0) + f'(k_0)\delta(x) + o(\delta),$$

или

$$x\delta' = A\delta + o(\delta),$$

откуда

$$\frac{x\delta'}{\delta} = A + \frac{o(\delta)}{\delta}, \quad \text{где} \quad A = f'(k_0) - 1.$$

Отбросив $\frac{o(\delta)}{\delta}$ (как величину, стремящуюся к нулю при $x \to 0$), можем записать $\frac{x\delta'}{\delta} \approx A$, откуда находим $\delta \approx C|x|^A$. Из полученной формулы следует, что если $C \neq 0$, то δ к нулю не стремится при $x \to 0$ (в силу того, что $A < 0$). Полученное противоречие и доказывает утверждение 1).

2) В этом случае противоречия нет, поскольку $A > 0$ и $\delta \to 0$ при $x \to 0$ для любых C. ▶

Замечание. Строго говоря, ни одно решение ни в одном из рассмотренных случаев не касается прямой $y = k_0x$ в начале координат, если молчаливо не допустить, что $\left.\frac{y}{x}\right|_{x=0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y}{x}$.

85. Две жидкости x и y подвергают дистиллированию. Известно, что в любой момент времени этого процесса отношение количеств жидкостей, которые превращаются в пар, пропорционально отношению количеств, которые находятся еще в жидком состоянии. Определить зависимость между x и y.

◀ Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — количество жидкостей, не превращенных в пар в момент времени t. Тогда $x(t+\Delta t)$ и $y(t+\Delta t)$ — количества жидкостей, не превращенных в пар в момент времени $t+\Delta t$. Следовательно, за время Δt в пар превратились следующие количества жидкостей:

$$x(t) - x(t+\Delta t) \quad \text{и} \quad y(t) - y(t+\Delta t).$$

Согласно условию, имеем

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{x(t+\Delta t) - x(t)} = k\frac{y(t_1)}{x(t_1)}, \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности, $t_1 \in (t, t+\Delta t)$. Если функции x и y дифференцируемы, то из (1) предельным переходом при $\Delta t \to 0$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x},$$

проинтегрировав которое, находим требуемую зависимость

$$y = Cx^k. \ ▶$$

§ 4. Линейные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

4.1. Линейное уравнение первого порядка.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

называется *линейным уравнением первого порядка*. Наиболее употребительным способом его решения является *метод вариации произвольной постоянной*. Сущность метода состоит в следующем.

Сначала ищется решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1):

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0. \tag{2}$$

Затем в общем решении уравнения (2) произвольную постоянную C считают некоторой дифференцируемой функцией от x: $C = C(x)$. Эту функцию находят из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, которое получается в результате подстановки общего решения уравнения (2) в уравнение (1).

4.2. Обмен ролями между функцией и аргументом.

Некоторые уравнения становятся линейными, если в них поменять ролями функцию и аргумент.

4.3. Уравнения, приводимые к линейным.

К линейным уравнениям приводятся также уравнения вида:

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + P(x)f(y) = Q(x), \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x) = Q(x)e^{ny}, \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^m \quad (\textit{уравнение Бернулли}). \tag{5}$$

Полагая в (3) $f(y) = z(x)$, получаем $f'(y)y' = z'(x)$ и $z' + P(x)z = Q(x)$.

В уравнении (4) целесообразно провести замену $e^{-ny} = z(x)$. Тогда получим

$$-ne^{-ny}y' = z', \quad -\frac{z'}{n} + P(x)z = Q(x) \quad (n \neq 0).$$

Уравнение Бернулли приводится к линейному с помощью замены $z(x) = y^{1-m}$ ($m \neq 0$, $m \neq 1$, так как в этих случаях оно уже линейное).

4.4. Уравнение Миндинга—Дарбу.

Уравнение Миндинга—Дарбу

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy + R(x, y)(x\,dy - y\,dx) = 0, \tag{6}$$

где M и N — однородные функции степени m, а R — однородная функция степени n, посредством замены $y = ux(u)$ приводится сначала к уравнению Бернулли, а последнее — уже известным способом к линейному.

Решить уравнения.

86. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$.

◀ Сначала находим все решения однородного уравнения, соответствующего данному:

$$y' + y \operatorname{tg} x = 0.$$

Переменные разделяются, и после интегрирования находим

$$y = C \cos x. \tag{1}$$

Формула (1) представляет общее решение однородного уравнения, где C — произвольная постоянная. Для получения всех решений данного уравнения считаем $C = C(x)$ и требуем, чтобы функция $y = C(x)\cos x$ удовлетворяла ему, т.е.

$$C' \cos x - C \sin x + C \cos x \operatorname{tg} x = \sec x,$$

или $C' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Отсюда находим $C(x) = \operatorname{tg} x + C_0$, где C_0 — новая произвольная постоянная. Подставив значение $C(x)$ в (1), окончательно получим

$$y = \sin x + C_0 \cos x. \ ▶$$

Примечание. В дальнейшем для новой произвольной постоянной будем использовать старое обозначение C. Таким образом, в рассмотренном примере $y = \sin x + C\cos x$ есть общее решение, а C — постоянная.

87. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.

◀ Решаем соответствующее однородное уравнение

$$(2x + 1)y' = 2y.$$

Его общее решение имеет вид $y = C(2x + 1)$. Применим метод вариации произвольной постоянной. Имеем

$$\Big(C'(2x + 1) + 2C\Big)(2x + 1) = 4x + 2C(2x + 1),$$

или $(2x + 1)^2 C' = 4x$. Отсюда находим

$$C(x) = 4\int \frac{x\,dx}{(2x + 1)^2} + C_0 = \ln|2x + 1| + \frac{1}{2x + 1} + C_0.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$y = (2x + 1)(\ln|2x + 1| + C) + 1. \ ▶$$

88. $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0$.

◀ Считая $dx \neq 0$ ($x = 0$ — тривиальное решение), записываем уравнение в виде

$$xy' - xy = e^x.$$

Соответствующее однородное уравнение $xy' - xy = 0$ имеет общее решение $y = Ce^x$. Далее применяем метод вариации произвольной постоянной. Имеем

$$x(C + C')e^x - xCe^x = e^x,$$

откуда $C' = \frac{1}{x}$, $C = \ln|x| + C_0$. Получаем все решения неоднородного уравнения:

$$y = e^x(\ln|x| + C); \quad x = 0. \blacktriangleright \tag{1}$$

89. $(x + y^2)\,dy = y\,dx$, $M(1, 1)$.

◀ Уравнение не является линейным относительно переменной y, однако оно линейное относительно x. Поэтому целесообразно считать x функцией y.

Считая $dy \neq 0$ ($y = 0$ — тривиальное решение), имеем

$$x + y^2 = y\frac{dx}{dy}.$$

Соответствующее однородное уравнение $x = y\frac{dx}{dy}$ имеет общее решение $x = Cy$. Применив метод вариации произвольной постоянной, получим последовательно

$$Cy + y^2 = y(C'y + C), \quad C' = 1, \quad C = y + C_0.$$

Следовательно, все решения данного уравнения описываются формулами

$$x = Cy + y^2; \quad y = 0. \blacktriangleright \tag{1}$$

Замечание. Переписав первую формулу в (1) в виде $y = \frac{x - y^2}{C}$ и положив $C = \infty$, получим решение $y = 0$. Таким образом, если допустить, что постоянная C может принимать сингулярное значение, то решение $y = 0$ можно не выписывать отдельно.

Полагая в (1) $x = 1$, $y = 1$, находим $C = 0$. Тогда из (1) получим частное решение $x = y^2$.

90. $(2e^y - x)y' = 1$.

◀ Предложенное уравнение линейное относительно x. Так как $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, то его можно записать в виде

$$2e^y - x = x'. \tag{1}$$

Общим решением однородного уравнения $x' + x = 0$ является функция

$$x = Ce^{-y}. \tag{2}$$

Считая $C = C(y)$ и подставив (2) в уравнение (1), получим последовательно

$$2e^y - Ce^{-y} = C'e^{-y} - Ce^{-y}, \quad C' = 2e^{2y}, \quad C(y) = e^{2y} + C_0.$$

Окончательно имеем

$$x = Ce^{-y} + e^y. \blacktriangleright$$

91. $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$.

◀ Уравнение линейное относительно переменной x, поэтому представляем в его в виде

$$x' - x\operatorname{ctg} y = \sin^2 y.$$

Применив метод вариации произвольной постоянной, получим

$$x(y) = C(y)\sin y, \quad \text{где} \quad C(y) = -\cos y + \text{const}. \blacktriangleright$$

92. $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + (2 - x)\ln y = x\left(e^{-2x} + e^{\frac{x^2}{2}}\right)$.

◀ Это уравнение вида (3), п. 4.3, поэтому применяем замену $\ln y = z(x)$. Имеем

$$z' = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}, \quad z' + (2 - x)z = x\left(e^{-2x} + e^{\frac{x^2}{2}}\right).$$

Полученное уравнение линейное относительно z. Пользуясь методом вариации произвольной постоянной, получаем

$$z(x) = C(x)e^{\frac{x^2}{2}-2x}, \quad \text{где} \quad C(x) = \int x\left(e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{2x}\right)dx + C_0.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\ln y = e^{\frac{x^2}{2}-2x}\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - e^{-\frac{x^2}{2}} + C\right). \blacktriangleright$$

93. $\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{y^2+1} = x^2 + 1.$

◀ Это также уравнение вида (3) , п. 4.3. Следовательно, произведем замену $z(x) = \sqrt{y^2+1}$. Тогда получим

$$z' = \frac{y'}{\sqrt{y^2+1}}, \quad z' + z = x^2 + 1.$$

Проделав всю необходимую процедуру, требуемую в методе вариации произвольной постоянной, найдем:

$$z = C(x)e^{-x}, \quad \text{где} \quad C(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 3\right) + C_0.$$

Итак,

$$\sqrt{y^2+1} = x^2 - 2x + 3 + Ce^{-x}$$

— общее решение исходного уравнения. ▶

94. $e^{-x}\dfrac{dy}{dx} - e^{-x} = e^y.$

◀ Умножив обе части рассматриваемого уравнения на e^x, получим уравнение вида (4), п. 4.3.:

$$\frac{dy}{dx} - 1 = e^x e^y.$$

Следовательно, применяем замену $z(x) = e^{-y}$. Тогда получим последовательно

$$z'(x) = -e^{-y}y'(x), \quad -e^y z' - 1 = e^x e^y, \quad -z' - z = e^x.$$

Полученное уравнение линейно относительно z. Его решение имеет вид:

$$z = Ce^{-x} - \frac{1}{2}e^x.$$

Осталось записать общее решение исходного уравнения:

$$e^{-y} = Ce^{-x} - \frac{1}{2}e^x. \blacktriangleright$$

95. $3\,dy + \left(1 + e^{x+3y}\right)dx = 0.$

◀ Преобразовав уравнение к виду

$$3\frac{dy}{dx} + 1 = -e^x \cdot e^{3y},$$

замечаем, что оно относится к виду (4), п. 4.3. Поэтому воспользуемся заменой $z(x) = e^{-3y}$. Тогда последовательно получим

$$z'(x) = -3e^{-3y}y', \quad -\frac{z'}{z} + 1 = -\frac{e^x}{z}, \quad z' - z = e^x.$$

Общее решение линейного уравнения находим известным способом, в результате чего имеем

$$z(x) = Ce^x + xe^x.$$

Осталось записать общее решение исходного уравнения:

$$y = -\frac{1}{3}\ln(C + x) - \frac{x}{3}. \blacktriangleright$$

96. $\dfrac{\sqrt{\ln y}}{y}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{3(x+1)}\sqrt{(\ln y)^3} = 1.$

◀ Уравнение относится к виду (3), п. 4.3, поскольку

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\sqrt{(\ln y)^3}\right) = \frac{\sqrt{\ln y}}{y}\frac{dy}{dx}.$$

Следовательно, произведя замену $z(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln y)^3}$, получим линейное уравнение

$$z' + \frac{z}{x+1} = 1,$$

общее решение которого имеет вид:

$$z = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{C}{x+1}.$$

Окончательно общий интеграл запишется в виде

$$\frac{2}{3}\sqrt{(\ln y)^3} = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{C}{x+1}. \text{ ▶}$$

97. $(x+1)(y' + y^2) = -y.$

◀ Считая, что $x \neq -1$, делим обе части уравнения на $x+1$ и записываем его в виде

$$y' + \frac{y}{x+1} = -y^2.$$

Это есть уравнение Бернулли. Разделив обе его части на y^2, затем производим замену $y^{-1} = z(x)$. Тогда последовательно получаем

$$z'(x) = -y^{-2}y', \quad z' - \frac{z}{x+1} = 1.$$

Полученное линейное уравнение решаем методом вариации произвольной постоянной. При этом находим

$$z = C(x)(x+1), \quad \text{где} \quad C(x) = \ln|x+1| + C_0.$$

Окончательно решение исходного уравнения принимает вид

$$y = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + C)}. \text{ ▶}$$

98. $xy\,dx + (x^2 + y^2 + 1)\,dy = 0.$

◀ Произведя замену $x^2 = u(y)$, получим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{1}{2}y\frac{du}{dy} + u = -(y^2+1).$$

Его общее решение имеет вид $u = \dfrac{C(y)}{y^2}$, где $C(y) = -y^2\left(\dfrac{y^2}{2} + 1\right) + \text{const}$. Таким образом, имеем все решения исходного уравнения:

$$y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C. \text{ ▶}$$

99. $(x^3y - 3x^2y + y^3)\,dx + 2x^3\,dy = 0.$

◀ Разделив обе части уравнения на $dx \neq 0$ ($x = 0$ — очевидное решение), получим уравнение Бернулли

$$2x^3\frac{dy}{dx} + (x^3 - 3x^2)y = -y^3.$$

Считая $y \neq 0$ ($y = 0$ — тривиальное решение), делим обе части последнего уравнения на $-y^3$ и полагаем $\dfrac{1}{y^2} = z(x)$. Тогда получим

$$-\frac{2y'}{y^3} = z'(x); \quad x^3z' - (x^3 - 3x^2)z = 1.$$

Решая это линейное уравнение, находим

$$z = C(x)x^{-3}e^{x}, \quad \text{где} \quad C(x) = -e^{-x} + C_0.$$

Теперь запишем все решения исходного уравнения:

$$Cy^2e^x - y^2 - x^3 = 0; \quad x = 0; \quad y = 0. \blacktriangleright$$

100. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$.

◀ Умножив обе части уравнения на y и положив $y^2 = u(x)$, получим линейное уравнение

$$u' - \frac{x}{x^2 - 1}u = x. \qquad (1)$$

Ищем решение в виде $u = f(x)w(x)$. Подставив u и u' в (1), имеем

$$\left(f' - \frac{xf}{x^2 - 1}\right)w + w'f = x.$$

Функции f и w находим из уравнений

$$f' - \frac{xf}{x^2 - 1} = 0, \quad w'f = x.$$

Из первого уравнения получаем $f = C\sqrt{|x^2 - 1|}$. Из второго уравнения следует, что

$$w = \frac{1}{C}\sqrt{|x^2 - 1|}\operatorname{sgn}(x^2 - 1) + C_0.$$

Следовательно, $u = |x^2 - 1|\operatorname{sgn}(x^2 - 1) + C\sqrt{|x^2 - 1|} = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$, откуда

$$y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}. \blacktriangleright$$

101. $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$.

◀ Разделив обе части уравнения на $y' \neq 0$ ($y = 0$ — очевидное решение) и приняв x за функцию от y, получим уравнение Бернулли

$$2y\frac{dx}{dy} - x = -x^3 \sin y.$$

Используя замену $x^{-2} = z(y)$, приходим к линейному уравнению

$$yz' + z = \sin y,$$

общее решение которого выражается формулой

$$z = \frac{C}{y} - \frac{\cos y}{y}.$$

Все решения исходного уравнения имеют вид:

$$y = 0; \quad \frac{1}{x^2} = \frac{C}{y} - \frac{\cos y}{y}, \quad \text{или} \quad y + x^2\cos y - Cx^2 = 0. \blacktriangleright$$

102. $(x^2 + y^2 + 2x - 2y)\,dx + 2(y - 1)\,dy = 0$.

◀ Преобразовывая уравнение следующим образом:

$$\left((x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 2\right) d(x + 1) + d(y - 1)^2 = 0$$

и полагая $x + 1 = u$, $(y - 1)^2 = v$, приходим к линейному уравнению

$$\frac{dv}{u} + v = 2 - u^2$$

с его общим решением $v = Ce^{-u} - u^2 + 2u$. Все решения исходного уравнения описываются формулой

$$x^2 + y^2 - 2y = Ce^{-x}. \blacktriangleright$$

103. $(e^y - y')x = 2$.

◀ Полагая $e^y = z(x)$, получим уравнение Бернулли

$$z' + \frac{2}{x}z = z^2.$$

Его общее решение имеет вид

$$z(x) = \frac{1}{x(1 + Cx)}.$$

Общее решение исходного уравнения запишется в виде

$$y = -\ln(x + Cx^2). \blacktriangleright$$

104. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)\,dt + x + 1$.

◀ Взяв от обеих частей равенства производную, получим линейное уравнение

$$y' = y + 1,$$

общее решение которого

$$y = Ce^x - 1.$$

Исходя из очевидного начального условия $y(0) = 1$, находим $C = 2$. Следовательно,

$$y = 2e^x - 1. \blacktriangleright$$

105. $\int\limits_0^x (x - t)y(t)\,dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)\,dt$.

◀ Дважды дифференцируя левую и правую части равенства, имеем последовательно

$$\int\limits_0^x y(t)\,dt = 2 + y(x); \quad y(x) = y'(x),$$

откуда находим $y(0) = -2$ и $y(x) = Ce^x$. Из начального условия следует, что $C = 2$. Итак, функция

$$y(x) = -2e^x$$

есть решение поставленной задачи. ▶

106. $y\,dx + x\,dy + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$.

◀ Это уравнение Миндинга—Дарбу, поскольку функции $M(x, y) = y$ и $N(x, y) = x$ однородные и имеют степень 1, а функция $R(x, y) = y^2$ однородная и имеет степень 2. Следовательно, применима замена $y = ux(u)$. Имеем $ux\,dx + x(u\,dx + x\,du) + u^2x^2(x(u\,dx + x\,du) - ux\,dx) = 0$, или

$$2u\,dx + x(1 + x^2u^2)\,du = 0; \quad x = 0. \tag{1}$$

Разделим обе части полученного дифференциального уравнения на du. Оно превратится в уравнение Бернулли

$$2u\frac{dx}{du} + x = -u^2x^3.$$

Полагая $x^{-2} = z$, приходим к линейному уравнению

$$uz' - z = u^2.$$

Легко проверить, что его общее решение представляется в виде $z = u^2 + Cu$. Последовательно возвращаясь к старым переменным, окончательно имеем

$$y^2 + Cxy - 1 = 0.$$

Решения $x = 0$ и $y = 0$ входят сюда при $C = \infty$. ▶

107. $(x^2y + y^3 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0.$

◀ Записывая уравнение в виде

$$0 \cdot y^3\,dy + (x^2y + y^3)\,dx + x(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

замечаем, что оно есть уравнение Миндинга—Дарбу. Поэтому, полагая $y = ux$, получаем

$$x^3(u + u^3)\,dx + x^3\,du = 0,$$

или

$$x = 0; \quad \frac{du}{u(1+u^2)} + dx = 0; \quad u = 0.$$

Отсюда следует, что $\frac{u}{\sqrt{u^2+1}} = Ce^{-x}$. Возвращаясь к переменным x и y, окончательно получаем

$$y^2 = C^2e^{-2x}(x^2 + y^2); \quad x = 0. \ ▶$$

108. $y^2(x + a)\,dx + x(x^2 - ay)\,dy = 0.$

◀ Это уравнение Миндинга—Дарбу, поскольку оно приводится к стандартному виду

$$y^2x\,dx + x^3\,dy + ay(y\,dx - x\,dy) = 0.$$

Произведя замену $y = ux(u)$, получим линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{du} + \frac{x}{u(u+1)} = \frac{a}{u+1},$$

для решения которого применим метод вариации произвольной постоянной. Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$x = \frac{u+1}{u}C. \tag{1}$$

Считая $C = C(u)$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dC}{du} = a\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2}\right),$$

решение которого имеет вид

$$C(u) = a\ln(C_0(u+1)) + \frac{a}{u+1}, \quad C_0 = \text{const}.$$

Подставив значение $C(u)$ в (1) и принимая во внимание, что $u = \frac{y}{x}$, запишем общее решение исходного уравнения в виде

$$\frac{x}{x+y} = C\exp\left(\frac{x(a-y)}{a(x+y)}\right). \ ▶$$

109. $(2xy - x^2y - y^3)\,dx - (x^2 + y^2 - x^3 - xy^2)\,dy = 0.$

◀ Это также уравнение Миндинга—Дарбу, поскольку

$$(2xy - x^2y - y^3)\,dx - (x^2 + y^2 - x^3 - xy^2)\,dy = 2xy\,dx - (x^2+y^2)\,dy - (x^2+y^2)(y\,dx - x\,dy).$$

Полагая $y = ux(u)$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$(u - u^3)\,dx + x(1+u^2)(x-1)\,du = 0,$$

из которого следует, что

$$\frac{x-1}{x}\,\frac{u}{1-u^2} = C.$$

Следовательно, в старых переменных имеем

$$y(x-1) = C(x^2 - y^2). \ ▶$$

Решить следующие задачи.

110. Найти кривую, которая имеет следующее свойство: отрезок оси Ox от начала координат до пересечения с касательной к этой кривой в любой точке пропорционален ординате этой точки.

◀ Из уравнения касательной к искомой кривой в точке $M(x, y)$

$$Y - y = y'(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты касательной, следует, что абсцисса точки пересечения ее с осью Ox равна $x - \frac{y}{y'}$. Согласно условию, имеем уравнение

$$x - \frac{y}{y'} = ky, \quad \text{или} \quad y\frac{dx}{dy} - x = -ky.$$

Все решения полученного уравнения имеют вид

$$x = y(C - k\ln|y|). \blacktriangleright$$

111. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

◀ Из уравнения касательной (см. предыдущий пример) находим длину отрезка OK : $|OK| = y - xy'$ (рис. 21). Пусть S — площадь трапеции $KONM$. Имеем

$$S = \frac{|KO| + |MN|}{2}|ON|.$$

Согласно условию задачи, $S = 3a^2$. Следовательно,

$$3a^2 = \frac{1}{2}(y - xy' + y)x.$$

Полученное уравнение линейное относительно y:

$$xy' - 2y = -\frac{6a^2}{x}.$$

Его общее решение имеет вид

$$y = \frac{2a^2}{x} + Cx^2. \blacktriangleright$$

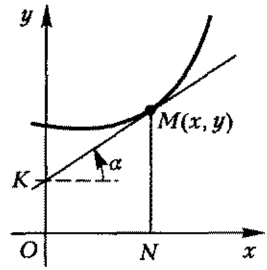

Рис. 21

112. Найти кривую, в каждой точке которой поднормаль является средним арифметическим квадратов координат этой точки.

◀ Согласно условию, имеем (рис. 22.):

$$|NL| = \frac{1}{2}\left(|ON|^2 + |MN|^2\right).$$

Рассмотрим треугольник MNL и найдем длину катета NL. Имеем $|NL| = yy'$. Таким образом, дифференциальное уравнение искомых кривых имеет вид

$$2yy' = x^2 + y^2.$$

Полагая в нем $y^2 = u$, получим линейное уравнение $u' - u = x^2$. Решая его, находим $u = Ce^x - x^2 - 2x - 2$. Окончательно имеем

$$y^2 = Ce^x - x^2 - 2x - 2. \blacktriangleright$$

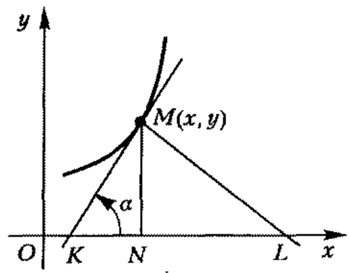

Рис. 22

113. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак втекает 5 л воды в минуту, а смесь с той же скоростью переливается в другой 100-литровый бак, первоначально наполненный чистой водой. Избыток жидкости из него выливается. Когда количество соли во втором баке будет наибольшим? Чему оно равно?

◀ Пусть $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ — количества соли в кг соответственно в первом и втором баке в момент времени t от начала переливания. Тогда $\frac{5Q_1(t_{11})\Delta t}{100}$ — количество соли, выливающееся из первого бака во второй за время от t до $t + \Delta t$, а $\frac{5Q_2(t_{12})\Delta t}{100}$ — количество соли, выливающееся из второго бака за этот же промежуток времени, где $t_{11} \in (t, t + \Delta t)$, $t_{12} \in (t, t + \Delta t)$. Следовательно,

$$Q_2(t + \Delta t) = Q_2(t) + \frac{5Q_1(t_{11})}{100}\Delta t - \frac{5Q_2(t_{12})}{100}\Delta t \qquad (1)$$

есть количество соли во втором баке в момент времени $t+\Delta t$, а

$$Q_1(t+\Delta t)=Q_1(t)-\frac{5Q_1(t_{11})}{100}\,\Delta t \tag{2}$$

есть количество соли в первом баке в этот же момент времени. Из (2), переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ_1}{dt}=-0{,}05Q_1,$$

откуда $Q_1=Ce^{-0{,}05t}$, где время t измеряется в минутах. Поскольку $Q_1(0)=10$, то $C=10$. Следовательно,

$$Q_1=10e^{-0{,}05t}. \tag{3}$$

Совершив предельный переход в (1) при $\Delta t\to 0$, и принимая во внимание (3), получим

$$\frac{dQ_2}{dt}=-0{,}05Q_2+0{,}5e^{-0{,}05t}.$$

Решив линейное уравнение, имеем

$$Q_2(t)=(0{,}5t+C)e^{-0{,}05t}.$$

Так как $Q_2(0)=0$, то $C=0$. Окончательно находим

$$Q_2(t)=0{,}5te^{-0{,}05t}.$$

Исследуя функцию Q_2 на экстремум, получим, что $\max Q_2$ достигается при $t=20$ мин и равен

$$Q_2(20)=\frac{10}{e}\approx 3{,}68\text{ кг.}\ \blacktriangleright$$

114. За время Δt (где $\Delta t\to 0$ и выражено в долях года) из каждого грамма радия распадается $0{,}00044\,\Delta t$ грамма и образуется $0{,}00043\,\Delta t$ грамма радона. Из каждого грамма радона за время Δt распадается $70\Delta t$ грамма. В начале опыта имелось некоторое количество x_0 чистого радия. Когда количество образовавшегося и еще не распавшегося радона будет наибольшим?

◀ Обозначим через $P(t)$ и $Q(t)$ количества нераспавшихся радия и радона соответственно в момент времени t от начала распада (в годах). Тогда $P(t)-P(t+\Delta t)$ есть количество распавшегося радия за время от t до $t+\Delta t$, а $Q(t+\Delta t)-Q(t)$ — количество образовавшегося радона за это же время. Согласно условию задачи, имеем уравнения:

$$P(t)-P(t+\Delta t)=P(t_{11})\cdot 0{,}00044\Delta t, \tag{1}$$

$$Q(t+\Delta t)-Q(t)=P(t_{11})\cdot 0{,}00043\Delta t-Q(t_{12})70\Delta t, \tag{2}$$

где $t_{11}\in(t,\,t+\Delta t)$, $t_{12}\in(t,\,t+\Delta t)$. Совершив предельный переход при $\Delta t\to 0$ (предварительно разделив на Δt левые и правые части уравнений (1) и (2)), получим дифференциальные уравнения

$$\frac{dP}{dt}=-0{,}00044P(t), \tag{3}$$

$$\frac{dQ}{dt}=0{,}00043P(t)-70Q(t). \tag{4}$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$P(t)=x_0e^{-0{,}00044t}. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), получим дифференциальное уравнение, проинтегрировав которое, найдем:

$$Q(t)=Ce^{-70t}+\frac{0{,}00043x_0}{69{,}99956}e^{-0{,}00044t}.$$

Принимая во внимание начальное условие $Q(0)=0$, определяем C: $C=-\frac{0{,}00043x_0}{69{,}99956}$. Окончательно имеем

$$Q(t)=\frac{0{,}00043x_0}{69{,}99956}\left(e^{-0{,}00044t}-e^{-70t}\right).$$

Исследование на экстремум функции $f(t)=e^{-0{,}00044t}-e^{-70t}$ показывает, что $\max f(t)$ достигается при

$$t=\frac{1}{69{,}99956}\ln\frac{70}{0{,}00044}\approx 0{,}17\text{ года}\approx 62\text{ дня.}\ \blacktriangleright$$

115. Даны два различных решения y_1 и y_2 линейного уравнения первого порядка. Выразить через них общее решение этого уравнения.

◀ Линейное дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

имеет общее решение

$$y = (C + \alpha(x))\beta(x), \tag{1}$$

где $\alpha(x) = \int Q(x)\beta^{-1}(x)\,dx$, $\beta(x) = \exp\left(-\int P(x)\,dx\right)$. Согласно условию, из (1) имеем

$$y_1(x) = (C_1 + \alpha(x))\beta(x), \quad y_2(x) = (C_2 + \alpha(x))\beta(x), \tag{2}$$

где C_1 и C_2 — постоянные, соответствующие решениям y_1 и y_2. Далее, исходя из равенств (2), выражаем функции α и β через решения y_1 и y_2. Получим

$$\alpha(x) = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{C_1 - C_2} \quad (C_1 \neq C_2), \quad \beta(x) = \frac{C_1 y_2(x) - C_2 y_1(x)}{y_1(x) - y_2(x)} \quad (y_1(x) \not\equiv y_2(x)).$$

Наконец, подставив значения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в (1), найдем:

$$y = \frac{1}{C_1 - C_2}\Big((C_1 - C)y_2(x) + (C - C_2)y_1(x)\Big) = y_2(x) + \widetilde{C}\Big(y_2(x) - y_1(x)\Big),$$

где $\widetilde{C} = \frac{C_2 - C}{C_1 - C_2}$ — произвольная постоянная. ▶

116. Найти то решение уравнения

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x),$$

которое остается ограниченным при $x \to \frac{\pi}{2}$.

◀ Из рассмотрения общего решения этого уравнения

$$y = C \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}$$

следует, что $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} y(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(C \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right)$ существует лишь при $C = 1$ и равен нулю. Поэтому

$$y = \operatorname{tg} x - \sec x$$

является требуемым решением. ▶

117. Пусть в уравнении $xy' + ay = f(x)$ имеем $a = \text{const} > 0$, непрерывная функция $f \to b$ при $x \to 0$. Показать, что только одно решение уравнения остается ограниченным при $x \to 0$, и найти предел этого решения при $x \to 0$.

◀ Представляем общее решение уравнения в виде

$$y = \frac{C}{|x|^a} + \frac{1}{|x|^a} \int\limits_0^x f(t)|t|^{a-1}\,d(|t|)$$

$(d(|t|) = \operatorname{sgn} t\,dt,\ t \neq 0)$, или

$$y = \frac{C}{|x|^a} + \frac{b}{a} + \frac{1}{|x|^a} \int\limits_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1}\,d(|t|), \tag{1}$$

где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to 0$ в силу условия. Вследствие оценки

$$\frac{1}{|x|^a} \left| \int\limits_0^x \varepsilon(t)|t|^{a-1}\,d(|t|) \right| \leqslant \frac{1}{a} \sup_{0 \leqslant t \leqslant x} |\varepsilon(t)| \to 0, \quad x \to 0,$$

из (1) следует, что $\lim\limits_{x \to 0} y$ существует и ограничен только при $C = 0$ и равен $\frac{b}{a}$. Решение уравнения, о котором шла речь в условии задачи, имеет вид

$$y = \frac{1}{|x|^a} \int\limits_0^x f(t)|t|^{a-1}\,d(|t|). \text{ ▶}$$

118. Пусть в дифференциальном уравнении в предыдущей задаче $a = \text{const} < 0$, $f(x) \to b$ при $x \to 0$. Показать, что все решения этого уравнения имеют один и тот же конечный предел при $x \to 0$. Найти этот предел.

◀ Очевидно, что общее решение рассматриваемого уравнения при соблюдении условия $f(x) \to b$ при $x \to 0$ можно представить в виде

$$y = |x|^{-a}\left(C + \int f(x)|x|^{a-1}\,d(|x|)\right) = \frac{b}{a} + |x|^{-a}\left(C + \int \varepsilon(x)|x|^{a-1}\,d(|x|)\right).$$

Если интеграл $\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}\,d(|x|)$ ограничен, то при любом C, очевидно, $\lim\limits_{x\to0} y(x) = \frac{b}{a}$. Если указанный интеграл не ограничен при $x \to 0$, то применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{\int \varepsilon(x)|x|^{a-1}\,d(|x|)}{|x|^a} = \lim_{x\to0}\frac{\varepsilon(x)|x|^{a-1}}{a|x|^{a-1}} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to0} y(x) = \frac{b}{a}$ при всех значениях C. ▶

119. Показать, что уравнение $\frac{dx}{dt} + x = f(t)$, где функция f непрерывная и $|f(t)| \leqslant M$ при $-\infty < t < +\infty$, имеет одно решение, ограниченное при $-\infty < t < +\infty$. Найти это решение. Показать, что найденное решение периодическое, если функция f периодическая.

◀ Общее решение данного уравнения можно представить в виде

$$x(t) = Ce^{-t} + e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau. \qquad (1)$$

Такое представление возможно в силу того, что несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau,$$

как показывает оценка

$$\left|\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau\right| \leqslant Me^{t}, \qquad (2)$$

сходится. Из неравенства (2) также следует, что функция $e^{-t}\int\limits_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau$ ограничена числом M для всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Таким образом, необходимым (и достаточным) условием ограниченности функции x является равенство $C = 0$. Упоминаемое в условии решение имеет вид

$$x(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau. \qquad (3)$$

Пусть, далее, $\forall\tau \in (-\infty, +\infty)$ $f(\tau + T) = f(\tau)$, где $T > 0$. Тогда из (3) находим

$$x(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau + T)e^{\tau}\,d\tau = e^{-(t+T)}\int_{-\infty}^{t+T} f(\tau_1)e^{\tau_1}\,d\tau_1 = x(t+T),$$

где $\tau_1 = \tau + T$. Следовательно, x — периодическая функция. ▶

Замечание. Требование непрерывности функции f не является необходимым. Выделение класса функций f, для которого эта теорема верна, предоставляется читателю.

120. Показать, что только одно решение уравнения $xy' - (2x^2 + 1)y = x^2$ стремится к конечному пределу при $x \to +\infty$, и найти этот предел. Выразить это решение через интеграл.

◀ Исходим из общего решения данного уравнения

$$y = xe^{x^2}\left(C + \int e^{-x^2}\,dx\right). \qquad (1)$$

В силу сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt$, выражение в скобках в (1) можно представить в виде

$$C + \int e^{-x^2}\,dx = C_1 + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt, \tag{2}$$

где C_1 — некоторая постоянная. Равенство (2) легко проверяется посредством дифференцирования. Таким образом, все решения изучаемого уравнения выражаются формулой

$$y = xe^{x^2}\left(C_1 + \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt\right). \tag{3}$$

Пусть $x \to +\infty$. Тогда из (3) замечаем, что для ограниченности y при $x \to +\infty$ необходимо выполнение условия

$$C_1 = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = -\sqrt{\pi}.$$

Последнее равенство и достаточное для того, чтобы $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ был конечным. Действительно, по правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt - \sqrt{\pi}}{x^{-1}e^{-x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{-(x^{-2}+2)e^{-x^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Теперь запишем искомое решение:

$$y = xe^{x^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt - \sqrt{\pi}\right) = x\int\limits_{+\infty}^{x} e^{x^2-t^2}\,dt. \blacktriangleright$$

121. Найти периодическое решение уравнения

$$y' = 2y\cos^2 x - \sin x.$$

◀ В силу сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_{x}^{+\infty} e^{-t-\sin t\cos t}\sin t\,dt,$$

общее решение данного уравнения представляем в виде

$$y = Ce^{x+\sin x\cos x} - \int\limits_{x}^{+\infty} e^{-t+x-\sin t\cos t+\sin x\cos x}\sin t\,dt. \tag{1}$$

Поскольку функция $e^{x+\sin x\cos x}$, очевидно, не является периодической, а функция

$$y_1(x) = \int\limits_{x}^{+\infty} e^{-t+x-\sin t\cos t+\sin x\cos x}\sin t\,dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-s-\sin s\cos(s+2x)}\sin(x+s)\,ds,$$

как следует из тождества,

$$y_1(x) = \int\limits_{x+2\pi}^{+\infty} e^{-t_1+(x+2\pi)-\sin t_1\cos t_1+\sin(x+2\pi)\cos(x+2\pi)}\sin t_1\,dt_1 \equiv y_1(x+2\pi),$$

где $t_1 = t + 2\pi$, является 2π-периодической, то функция y периодическая только при $C = 0$. Полагая в (1) $C = 0$, получим периодическое решение $y = y_1(x)$. ▶

122. Пусть в уравнении

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x = f(t)$$

$a(t) \geqslant C > 0$, $f(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и функции a, f непрерывны при $t > t_0$. Доказать, что каждое решение этого уравнения стремится к нулю при $t \to +\infty$.

◀ Исходя из общего решения данного уравнения

$$x(t) = \left(C + \int f(t) \exp\left(\int a(t)\,dt\right) dt\right) \exp\left(-\int a(t)\,dt\right),$$

условий задачи, и применив правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{C + \int f(t)\exp\left(\int a(t)\,dt\right) dt}{\exp\left(\int a(t)\,dt\right)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)\exp\left(\int a(t)\,dt\right)}{a(t)\exp\left(\int a(t)\,dt\right)} = 0.$$

Заметим, что непрерывность функций a и f здесь гарантирует дифференцируемость соответствующих интегралов, а условие $a(t) \geqslant C > 0$ используется дважды:

$$\exp\left(\int a(t)\,dt\right) > e^{Ct} \to +\infty \quad \text{и} \quad \left|\frac{f(t)}{a(t)}\right| \leqslant \frac{|f(t)|}{C} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. ▶$$

123. Пусть в уравнении из предыдущей задачи имеем $a(t) \geqslant C > 0$ и пусть $x_0(t)$ решение с начальным условием $x_0(0) = b$. Показать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что если изменить функцию f и число b меньше чем на δ (т. е. заменить их такой функцией f_1 и таким числом b_1, что $|f_1(t) - f(t)| < \delta$, $|b_1 - b| < \delta$), то решение $x_0(t)$ изменится при $t \geqslant 0$ меньше, чем на ε. Это свойство решения называется устойчивостью по отношению к постоянно действующим возмущениям.

◀ Пусть $t_0 = 0$. Тогда общее решение рассматриваемого уравнения можно записать в виде

$$x(t) = \left(C + \int_0^t f(\tau)\exp\left(\int_0^\tau a(\xi)\,d\xi\right)d\tau\right)\exp\left(-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right). \tag{1}$$

Исходя из формулы (1) и условий задачи, имеем

$$x_0(t) = \left(b + \int_0^t f(\tau)\exp\left(\int_0^\tau a(\xi)\,d\xi\right)d\tau\right)\exp\left(-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right), \tag{2}$$

$$x_1(t) = \left(b_1 + \int_0^t f_1(\tau)\exp\left(\int_0^\tau a(\xi)d\xi\right)d\tau\right)\exp\left(-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right). \tag{3}$$

Вычитая почленно из (2) равенство (3), получим оценку

$$|x_0(t) - x_1(t)| \leqslant |b - b_1|\exp\left(-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right) + \int_0^t |f(\tau) - f_1(\tau)|\exp\left(-\int_\tau^t a(\xi)\,d\xi\right)d\tau. \tag{4}$$

Поскольку

$$|b - b_1| < \delta, \quad |f(\tau) - f_1(\tau)| < \delta, \quad \exp\left(-\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right) \leqslant e^{-Ct}, \quad \exp\left(-\int_\tau^t a(\xi)\,d\xi\right) \leqslant e^{-C(t-\tau)},$$

то из (4) следуют оценки

$$|x_0(t) - x_1(t)| \leqslant \delta\left(e^{-Ct} + \frac{1}{C}\left(1 - e^{-Ct}\right)\right) < \delta\left(1 + \frac{1}{C}\right).$$

Таким образом, если по заданному $\varepsilon > 0$ выбрать число $\delta = \frac{\varepsilon C}{1+C}$, то при $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|x_0(t) - x_1(t)| < \varepsilon,$$

указывающее, согласно определению, на устойчивость решения $x_0(t)$ при постоянно действующих возмущениях. ▶

§ 5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

5.1. Уравнение в полных дифференциалах.

Уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции Φ, т. е.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \equiv d\Phi(x, y). \tag{2}$$

Теорема. *Если функции M, N, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ непрерывны в некоторой односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, то условие*

$$\frac{\partial N}{\partial x} \equiv \frac{\partial M}{\partial y}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение $M\,dx + N\,dy$ было полным дифференциалом функции Φ.

При этом

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0, t)\,dt. \tag{3}$$

Точка (x_0, y_0) выбирается так, чтобы сегменты $[x_0, x]$, $[y_0, y]$ принадлежали области D. Функцию Φ можно также представить в виде

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} N(x, t)\,dt.$$

Все решения уравнения (1) содержатся в равенстве $\Phi(x, y) = C$, являющемся для этого уравнения общим интегралом.

5.2. Интегрирующий множитель.

Функция $\mu = \mu(x, y) \not\equiv 0$, после умножения на которую уравнение вида (1) превращается в уравнение в полных дифференциалах, называется *интегрирующим множителем* для этого уравнения.

Теорема 1. *Если функции M и N непрерывны, имеют непрерывные частные производные, то интегрирующий множитель существует, если $M^2 + N^2 \neq 0$ (достаточные условия).*

Теорема 2. *Если $\mu_0(x, y)$ — интегрирующий множитель уравнения вида* (1), *а $u_0(x, y)$ — соответствующий ему интеграл этого уравнения, т. е.*

$$\mu_0(M\,dx + N\,dy) = du_0,$$

то $\mu = \mu_0(x, y)\varphi(u_0)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция, также будет интегрирующим множителем указанного уравнения.

Это свойство интегрирующего множителя позволяет во многих случаях находить его *методом разбиения данного уравнения на две части.*

Сущность метода заключается в следующем. Пусть $u_1(x, y) = C_1$, $\mu_1(x, y)$; $u_2(x, y) = C_2$, $\mu_2(x, y)$ — общие интегралы и интегрирующие множители соответственно для уравнений

$$M_1\,dx + N_1\,dy = 0, \quad M_2\,dx + N_2\,dy = 0. \tag{4}$$

Тогда, в силу приведенной выше теоремы, функции $\mu_1^* = \mu_1\varphi_1(u_1)$ и $\mu_2^* = \mu_2\varphi_2(u_2)$ являются интегрирующими множителями для первого и второго уравнений соответственно. Если удастся подобрать функции φ_1 и φ_2 так, чтобы выполнялось равенство $\mu_1\varphi_1(u_1) = \mu_2\varphi_2(u_2)$, то интегрирующим множителем для уравнения

$$(M_1 + M_2)\,dx + (N_1 + N_2)\,dy = 0, \tag{5}$$

очевидно, является функция $\mu = \mu_1\varphi_1(u_1) = \mu_2\varphi_2(u_2)$.

5.3. Дифференциальное уравнение для интегрирующего множителя.

Если известно, что $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = \omega(x, y)$ — известная дифференцируемая функция, то интегрирующий множитель μ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(N\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{6}$$

Найти общие интегралы уравнений.

124. $(x\ln y - x^2 + \cos y)\,dy + (x^3 + y\ln y - y - 2xy)\,dx = 0$.

◀ Так как на множестве $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < +\infty,\ y > 0\right\}$ выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y\ln y - y - 2xy) = \frac{\partial}{\partial x}(x\ln y - x^2 + \cos y) = \ln y - 2x,$$

то левая часть рассматриваемого уравнения является полным дифференциалом некоторой функции Φ. По формуле (3), п. 5.1, получаем

$$\Phi(x, y) = \int_0^x (t^3 + y\ln y - y - 2ty)\,dt + \int_{y_0}^y \cos t\,dt = \frac{x^4}{4} + xy(\ln y - 1) - yx^2 + \sin y - \sin y_0.$$

Общий интеграл уравнения записывается в виде

$$x^4 + 4xy(\ln y - 1) - 4x^2y + 4\sin y = C. ▶$$

125. $\left(x + \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dx + \left(y - \dfrac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right)dy = 0$.

◀ Поскольку при $|y| > |x|$ выполняется тождество

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x + \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right) = -y(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

то имеем уравнение в полных дифференциалах. Применив формулу (3), п. 5.1, получим

$$\Phi(x, y) = \int_0^x \left(t + \frac{1}{\sqrt{y^2 - t^2}}\right)dt + \int_{y_0}^y t\,dt = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \arcsin\frac{x}{y} - \frac{1}{2}y_0^2.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$x^2 + y^2 + 2\arcsin\frac{x}{y} = C. ▶$$

Решить дифференциальные уравнения методом интегрирующего множителя, зная, что $\mu = f(x)$ или $\mu = f(y)$.

126. $\left(1 + \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2y}{x^2}\right)dy = 0$.

◀ Полагая в (6), п. 5.3, $\omega = x$, $M = 1 + \frac{y}{x^2}$, $N = \frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}$, получаем

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right)\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{2}{x^2} + \frac{4y}{x^3}\right) \equiv \frac{2\mu}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right),$$

или

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{2\mu}{x}.$$

Отсюда $\mu = x^2$ $(C = 1)$. Видим, что выбор функции ω оказался удачным. Умножив почленно данное уравнение на x^2, получим уравнение в полных дифференциалах

$$(x^2 + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0.$$

Применив формулу (3), п. 5.2, найдем общий интеграл:

$$x^3 + 3xy + 3y^2 = C. ▶$$

127. $y^2(x-3y)\,dx + (1-3xy^2)dy = 0.$

◄ Положим в (6), п. 5.3, $\omega = x$, $M = y^2(x-3y)$, $N = 1-3xy^2$:

$$\left(1-3xy^2\right)\frac{d\mu}{dx} = 2y(x-3y)\mu; \quad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{2y(x-3y)}{1-3xy^2}.$$

Замечаем, что μ не может зависеть только от x, поскольку слева в последнем равенстве имеется функция только от x, а справа — функция от x и y (x и y — независимые переменные). Испытаем теперь множитель $\omega = y$.

Имеем

$$-y^2(x-3y)\frac{d\mu}{dy} = 2y(x-3y)\mu; \quad -y\frac{d\mu}{dy} = 2\mu.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим $\mu = y^{-2}$ ($C = 1$).

Умножая обе части исходного уравнения на y^{-2}, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$(x-3y)\,dx + (y^{-2}-3x)\,dy = 0.$$

По формуле (3), п. 5.2, записываем общий интеграл этого уравнения

$$x^2y - 6xy^2 - 2 = Cy \quad (y \neq 0).$$

При почленном делении исходного уравнения на y^2 мы потеряли решение $y = 0$, поэтому общий его интеграл имеет вид

$$x^2y - 6xy^2 - 2 = Cy \quad (y = 0 \text{ при } C = \infty). \blacktriangleright$$

Проинтегрировать следующие уравнения с помощью множителя $\mu = \mu(x+y)$ или $\mu = \mu(x-y)$.

128. $\left(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3\right)dx + \left(2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3\right)dy = 0.$

◄ Пусть $\mu = \mu(x-y)$. Тогда, полагая в (6), п. 5.3 $\omega = x - y$, получим

$$\left(2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3 + \left(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3\right)\right)\frac{d\mu}{d\omega} = (6x^2 - 6y^2 + 2y - 2x)\mu,$$

или

$$\left(y^3 - x^3 + x^2 + y^2 + 3xy(x+y)\right)\frac{d\mu}{d\omega} = 2(3x^2 - 3y^2 + y - x)\mu.$$

Очевидно, что выражение $\dfrac{2(3x^2 - 3y^2 + y - x)}{y^3 - x^3 + x^2 + y^2 + 3xy(x+y)}$ не является функцией от $(x-y)$, поэтому будем искать функцию μ в виде $\mu = \mu(x+y)$. Тогда, аналогично проделанному выше, имеем

$$\left(2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3 - \left(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3\right)\right)\frac{d\mu}{d\omega} = (6x^2 - 6y^2 + 2y - 2x)\mu,$$

или

$$\left(3(y-x)(y^2+xy+x^2) - (y-x)(x+y) + 3xy(y-x)\right)\frac{d\mu}{d\omega} = (y-x)\left(2 - 6(x+y)\right)\mu,$$

откуда окончательно находим

$$\left(3(x+y)^2 - (x+y)\right)\frac{d\mu}{d\omega} = \left(2 - 6(x+y)\right)\mu,$$

или

$$(3\omega^2 - \omega)\mu' = 2(1 - 3\omega)\mu; \quad \omega\mu' + 2\mu = 0.$$

Решая последнее уравнение, получаем $\mu = \dfrac{1}{\omega^2} = \dfrac{1}{(x+y)^2}$ ($C = 1$). Умножив исходное уравнение на $\dfrac{1}{(x+y)^2}$, будем иметь уравнение в полных дифференциалах. Его общий интеграл имеет вид

$$\int_0^x \frac{2t^3 + 3t^2y + y^2 - y^3}{(t+y)^2}\,dt + \int_{y_0}^y 2t\,dt = \text{const} \quad (y_0 \neq 0),$$

или

$$x^3 + y^3 + xy = C(x+y).$$

Отметим, что решение $y = -x$ содержится в общем интеграле при $C = \infty$. ►

129. $\left(y - \dfrac{ay}{x} + x\right) dx + a\,dy = 0.$

◀ Ищем интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(x + y)$. Тогда из (6), п. 5.3, получим ($\omega = x + y$):

$$\left(a - y + \frac{ay}{x} - x\right) \frac{d\mu}{d\omega} = \left(1 - \frac{a}{x}\right) \mu,$$

или

$$\Big((a - x)x - y(x - a)\Big)\mu' = (x - a)\mu; \quad (x + y)\mu' + \mu = 0; \quad \omega\mu' + \mu = 0.$$

Таким образом, $\mu = \omega^{-1} = (x + y)^{-1}$ ($C = 1$) и данное уравнение приводим к виду

$$\left(1 - \frac{ay}{x(x + y)}\right) dx + \frac{a}{x + y}\,dy = 0.$$

Интегрируя его, получаем

$$\int\limits_{x_0}^{x} dt + a\int\limits_{0}^{y} \frac{dt}{x + t} = \text{const} \quad (x_0 \neq 0),$$

или

$$e^x \left|1 + \frac{y}{x}\right|^a = C. \;\blacktriangleright$$

Решить следующие уравнения, считая, что интегрирующий множитель имеет вид: $\mu = \mu(xy)$, $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ или $\mu = \mu(x^2 - y^2)$.

130. $(x^2 + y)\,dy + x(1 - y)\,dx = 0.$

◀ Испытаем множитель $\mu = \mu(xy)$, т. е. в (6), п. 5.3, положим $\omega = xy$. Тогда получим

$$\left((x^2 + y)y - (1 - y)x^2\right) \frac{d\mu}{d\omega} = (-x - 2x)\mu,$$

или

$$\left(2yx^2 + y^2 - x^2\right) \frac{d\mu}{d\omega} + 3x\mu = 0.$$

Замечаем, что отношение $\dfrac{3x}{2yx^2 + y^2 - x^2}$ через xy не выражается, следовательно, в рассмотренном виде интегрирующий множитель не существует.

Положим $\omega = x^2 + y^2$. Тогда будем иметь

$$\left((x^2 + y)2x - (1 - y)2xy\right) \frac{d\mu}{d\omega} = -3x\mu,$$

или

$$2\left(x^2 + y^2\right)\mu' + 3\mu = 0; \quad 2\omega\mu' + 3\mu = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим $\mu = \omega^{-\frac{3}{2}}$ ($C = 1$). Таким образом, исходное уравнение преобразовывается в уравнение в полных дифференциалах:

$$\frac{x^2 + y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dy + \frac{x(1 - y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = 0.$$

Проинтегрировав его, получим

$$\int\limits_{0}^{x} \frac{t(1 - y)\,dt}{(t^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{d(|y|)}{|y|^2} = \text{const} \quad (y_0 \neq 0),$$

или

$$(1 - y)\left(\frac{1}{|y|} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{1}{|y|} = C; \quad \frac{y}{|y|} + \frac{1 - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C. \;\blacktriangleright$$

131. $(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0.$

◀ Пусть $\omega = xy$. Тогда из (6), п. 5.3, получаем

$$\left((2x^2y^3 - x)y - (2x^3y^2 - y)x\right)\frac{d\mu}{d\omega} = 4xy(x^2 - y^2)\mu,$$

или

$$(xy)^2\mu' + 2xy\mu = 0; \quad \omega\mu' + 2\mu = 0.$$

Отсюда находим $\mu = \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{x^2y^2}$ $(C = 1)$. Исходное уравнение приводится к уравнению в полных дифференциалах:

$$\left(2x - \frac{1}{x^2y}\right)dx + \left(2y - \frac{1}{xy^2}\right)dy = 0.$$

Применив формулу (3), п. 5.1, находим общий интеграл

$$\int\limits_1^x \left(2t - \frac{1}{t^2y}\right)dt + \int\limits_1^y \left(2t - \frac{1}{t^2}\right)dt = \text{const},$$

или

$$xy\left(x^2 + y^2\right) + 1 = Cxy. \ ▶$$

Решить уравнения, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных.

132. $(x^2 + y^2 + x)\,dx + y\,dy = 0.$

◀ Записывая уравнение в виде

$$\left(x^2 + y^2\right)dx + \frac{1}{2}\,d\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

и полагая $x^2 + y^2 = u$, получаем

$$u\,dx + \frac{1}{2}\,du = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$u = Ce^{-2x}, \quad \text{или} \quad \left(x^2 + y^2\right)e^{2x} = C. \ ▶$$

133. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$

◀ Записав уравнение в виде

$$dx + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$$

и приняв во внимание, что $\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)$, получаем $d\left(x + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) = 0$, откуда

$$x + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C$$

— общий интеграл уравнения. ▶

134. $y\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1 + y^2}.$

◀ Представим уравнение в виде

$$\frac{dy^2}{2\sqrt{1 + y^2}} = d(xy),$$

откуда

$$\sqrt{1 + y^2} = xy + C. \ ▶$$

135. $xy^2(xy' + y) = 1.$

◀ По аналогии с решением предыдущих примеров, имеем последовательно

$$(xy)^2(xy)' = x; \quad xy = u; \quad u^2u' = x; \quad \frac{1}{3}\left(u^3\right)' = x,$$

откуда

$$u^3 = \frac{3}{2}x^2 + C, \quad \text{или} \quad 2x^3y^3 - 3x^2 = C. \blacktriangleright$$

136. $y^2\,dx - \left(xy + x^3\right)dy = 0.$

◀ Считая $x \neq 0$, $y \neq 0$ ($x = 0$ и $y = 0$ — тривиальные решения), преобразуем уравнение к виду

$$y(y\,dx - x\,dy) - x^3\,dy = 0,$$

откуда

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} - \frac{x}{y}\,dy = 0.$$

Полагая $\frac{y}{x} = u$, имеем

$$du + \frac{dy}{u} = 0.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрировав его, получим $u^2 + 2y = C$, или

$$y^2 + 2x^2y = Cx^2.$$

Решение $x = 0$ входит сюда при $C = \infty$, а решение $y = 0$ — при $C = 0$, поэтому можно считать, что получили общий интеграл исходного уравнения. ▶

137. $\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{dy}{y} = 0.$

◀ Преобразовываем последовательно уравнение следующим образом:

$$y\,dx + d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = 0; \quad x\,dx + \frac{x}{y}\,d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = 0; \quad \frac{1}{2}\,d\left(x^2\right) + \frac{1}{u}\,d(\ln u) = 0,$$

где $u = \frac{y}{x}$.

Поэтому

$$\frac{1}{2}\,d\left(x^2\right) + \frac{du}{u^2} = 0, \quad d\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{u}\right) = 0.$$

Отсюда находим

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{u} = \text{const}, \quad \text{или} \quad x^2y - 2x = 2Cy. \blacktriangleright$$

138. $(x^2 + 3\ln y)y\,dx = x\,dy.$

◀ Вводя замену $\ln y = u$, получаем уравнение

$$(x^2 + 3u)\,dx - x\,du = 0, \tag{1}$$

интегрирующий множитель которого ищем в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\mu(x^2 + 3u)\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\mu x) = 0,$$

откуда следует, что $4\mu + x\mu' = 0$. Интегрируя полученное уравнение, находим один из интегрирующих множителей $\mu = x^{-4}$. Разделив почленно уравнение (1) на x^4 ($x \neq 0$), приходим к уравнению в полных дифференциалах

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3u}{x^4}\right)dx - \frac{du}{x^3} = 0,$$

общий интеграл которого имеет вид

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} - \int_1^y \frac{dt}{tx^3} = \text{const}, \quad \text{или} \quad x^2 + \ln y = Cx^3. \blacktriangleright$$

139. $y^2\,dx + (xy + \operatorname{tg} xy)\,dy = 0$.

◀ Полагая $xy = u$, получаем $y = \frac{u}{x}$, $dy = \frac{1}{x^2}(x\,du - u\,dx)$.

Подставив y и dy в уравнение, имеем

$$\frac{u^2}{x^2}\,dx + (u + \operatorname{tg} u)\,\frac{x\,du - u\,dx}{x^2} = 0,$$

откуда

$$u \operatorname{tg} u\,dx = (u + \operatorname{tg} u)x\,du.$$

Интегрируя, находим

$$x = Cu\sin u, \quad \text{или} \quad y \sin xy = C. \ ▶$$

140. $y(x+y)\,dx + (xy+1)\,dy = 0$.

◀ Разделив почленно обе части уравнения на y, получим уравнение в полных дифференциалах

$$(x+y)\,dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)\,dy = 0.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$x^2 + 2xy + \ln y^2 = C.$$

При делении на y было потеряно решение исходного уравнения $y = 0$. ▶

Замечание. Полученный интеграл можно представить следующим образом:

$$\ln y^2 = \ln C - x^2 - 2xy,$$

откуда

$$y^2 e^{x^2+2xy} = C,$$

где C — новая постоянная. Теперь легко видеть, что решение $y = 0$ содержится в последней формуле общего решения при $C = 0$.

141. $y(y^2+1)\,dx + x(y^2 - x + 1)\,dy = 0$.

◀ Цепочка преобразований над уравнением:

$$(y^2+1)(y\,dx + x\,dy) - x^2\,dy = 0; \quad \frac{y\,dx + x\,dy}{x^2y^2} - \frac{dy}{y^2(y^2+1)} = 0; \quad \frac{d(xy)}{(xy)^2} = \frac{dy}{y^2(y^2+1)};$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dy}{y^2(y^2+1)}, \quad \text{где} \quad u = xy,$$

приводит, как видно, к уравнению с разделяющимися переменными.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2+1}\right)\,dy + C, \quad \text{т. е.} \quad \frac{x-y}{xy^2} + \operatorname{arctg} y = C. \ ▶$$

142. $(x^2 + 2x + y)\,dx - (x - 3x^2y)\,dy = 0$.

◀ Проводим последовательно преобразования:

$$(x^2+2x)\,dx + (y\,dx - x\,dy) + 3x^2y\,dy = 0; \quad \left(1 + \frac{2}{x}\right)\,dx - d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{3}{2}\,dy^2 = 0 \quad (x \neq 0);$$

$$d\left(x + \ln x^2 - \frac{y}{x} + \frac{3}{2}\,y^2\right) = 0.$$

Интегрируя, находим

$$x + \ln x^2 - \frac{y}{x} + \frac{3}{2}\,y^2 = C.$$

Присоединим еще “потерянное” решение $x = 0$. ▶

143. $y\,dx - x\,dy = 2x^3 \operatorname{tg} \frac{y}{x}\,dx$.

◀ Разделив обе части уравнения на x^2 и произведя замену $\frac{y}{x} = u$, получаем уравнение

$$du = 2x \operatorname{tg} u\,dx,$$

которое легко интегрируется. Имеем

$$\int \frac{d(\sin u)}{\sin u} = 2\int x\,dx + \ln C, \quad \text{откуда} \quad \left|\sin\frac{y}{x}\right| = Ce^{x^2}. \blacktriangleright$$

144. $y^2\,dx + (e^x - y)\,dy = 0.$

◀ Замены $e^x = u$ и $u = zy$ приводят к уравнениям

$$\frac{y}{u}\,du + \left(\frac{u}{y} - 1\right)\,dy = 0; \quad y\,dz + z^2dy = 0.$$

Последнее уравнение имеет общий интеграл

$$\ln|y| - ye^{-x} = C; \quad y = 0. \blacktriangleright$$

145. $xy\,dx = (y^3 + x^2y + x^2)\,dy.$

◀ Проведем следующие преобразования уравнения:

$$x(y\,dx - x\,dy) = y(x^2 + y^2)\,dy; \quad \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x}\,dy; \quad -d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}\,dy.$$

Положим $y = xu$. Тогда

$$-d(\operatorname{arctg} u) = u\,dy, \quad -\frac{du}{u(1+u^2)} = dy.$$

Интегрируя, получаем окончательно:

$$u^2 = \left(1 + u^2\right)Ce^{-2y}, \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{x^2 + y^2}e^{2y} = C. \blacktriangleright$$

146. $x^2y(y\,dx + x\,dy) = 2y\,dx + x\,dy.$

◀ Действуем аналогично проделанному в предыдущем примере. Имеем

$$(x^2y - 1)\,d(xy) = y\,dx; \quad (x^2y - 1)\,\frac{d(xy)}{xy} = \frac{dx}{x}.$$

Положим $xy = u$. Тогда получим

$$(xu - 1)\,\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}, \quad \text{или} \quad \left(u - \frac{1}{x}\right)\frac{du}{u} = \frac{dx}{x^2}.$$

Пусть $-\frac{1}{x} = v$, тогда

$$(u + v)\,\frac{du}{u} - dv = 0, \quad \text{или} \quad u\,du + v\,du - u\,dv = 0.$$

Разделим обе части уравнения на u^2 и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\frac{du}{u} - d\left(\frac{v}{u}\right) = 0, \quad \ln|u| - \frac{v}{u} = \text{const}.$$

Окончательно имеем

$$x^2y\ln Cxy = -1. \blacktriangleright$$

147. $(x^2 - y^2 + y)\,dx + x(2y - 1)\,dy = 0.$

◀ Образуем уравнение для интегрирующего множителя $\mu = \mu(\omega)$:

$$\left((2xy - x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x} - (x^2 - y^2 + y)\,\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = (-4y + 2)\mu.$$

Легко видеть, что оно допускает множитель вида $\mu = \mu(x)$:

$$x(2y - 1)\,\frac{d\mu}{dx} = 2(-2y + 1)\mu; \quad x\mu' + 2\mu = 0.$$

Интегрируя, получаем $\mu = x^{-2}$. Умножив обе части уравнения на μ, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{2y}{x} - \frac{1}{x}\right) dy = 0.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$x^2 + y^2 - y = Cx. \blacktriangleright$$

148. $(2x^2y^2 + y)\,dx + (x^3y - x)\,dy = 0.$

◀ Из уравнения для интегрирующего множителя

$$\left(x(x^2y - 1)\frac{\partial\omega}{\partial x} - (2x^2y + 1)y\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = (x^2y + 2)\mu$$

видно, что оно допускает множитель вида $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = xy$:

$$xy(x^2y - 1 - 2x^2y - 1)\frac{d\mu}{d\omega} = (x^2y + 2)\mu,$$

или $\omega\mu' + \mu = 0$. Из последнего уравнения находим $\mu = \omega^{-1} = (xy)^{-1}$. Разделив обе части исходного уравнения на xy ($x \neq 0$, $y \neq 0$), получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(2xy + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x^2 - \frac{1}{y}\right) dy = 0,$$

проинтегрировав которое, находим:

$$x^2(1 + y) + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = C.$$

Очевидно, что уравнение имеет также тривиальные решения $x = 0$, $y = 0$. ▶

149. $y\left(x + y^2\right) dx + x^2(y - 1)\,dy = 0.$

◀ Применим метод разбиения на две части. Для этого рассмотрим два уравнения

$$xy\,dx - x^2dy = 0, \quad y^3\,dx + x^2y\,dy = 0.$$

Легко убедиться в том, что для первого уравнения $\mu_1 = \frac{1}{x^2y}$ и общий интеграл $u_1(x, y) \equiv \frac{y}{x} = C_1$, а для второго $\mu_2 = \frac{1}{x^2y^3}$, $u_2(x, y) \equiv \frac{xy}{x+y} = C_2$. Согласно методу разбиения на две части, интегрирующий множитель μ для исходного уравнения удовлетворяет соотношению

$$\mu = \frac{1}{x^2y}\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2y^3}\varphi_2\left(\frac{xy}{x+y}\right),$$

откуда

$$\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{y^2}\varphi_2\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Пусть $\varphi_2(z) = z^2$. Тогда

$$\frac{1}{y^2}\varphi_2\left(\frac{xy}{x+y}\right) = \frac{x^2}{(x+y)^2} = \frac{1}{(1+\frac{y}{x})^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{1}{(1+\alpha)^2} \quad \text{и} \quad \mu(x, y) = \frac{1}{x^2y}\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{1}{y(x+y)^2}.$$

Умножив обе части исходного уравнения на $\mu(x, y)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{x+y^2}{(x+y)^2}\,dx + \frac{x^2(y-1)}{y(x+y)^2}\,dy = 0.$$

Выберем в формуле (3), п. 5.1, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Получим общий интеграл в виде

$$\Phi(x, y) = \int_0^x \frac{t+y^2}{(t+y)^2}\,dt = C, \quad \frac{x(y-1)}{x+y} + \ln\left|\frac{x+y}{y}\right| = C.$$

Уравнение имеет также тривиальные решения $x = 0$ и $y = 0$, которые включаем в общий интеграл соответственно при $C = 0$ и $C = \infty$. ▶

150. $(x^2 - \sin^2 y)\,dx + x \sin 2y\,dy = 0$.

◀ Составив дифференциальное уравнение для интегрирующего множителя

$$\left(x \sin 2y \frac{\partial\omega}{\partial x} - (x^2 - \sin^2 y)\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = -2\sin 2y \cdot \mu, \tag{1}$$

видим, что оно допускает множитель вида $\mu = \mu(x)$. Тогда из (1) следует, что

$$x\mu' + 2\mu = 0,$$

откуда $\mu = x^{-2}$. Разделив исходное уравнение на x^2 $(x \neq 0)$ и проинтегрировав полученное, имеем

$$\frac{1}{x}\int_0^y \sin 2t\,dt + \int_{x_0}^x dt = \text{const}, \quad x_0 \neq 0,$$

или, окончательно,

$$\sin^2 y + x^2 = Cx.$$

Решение $x = 0$ включаем сюда при $C = \infty$. ▶

151. $x(\ln y + 2\ln x - 1)\,dy = 2y\,dx$.

◀ Из дифференциального уравнения для интегрирующего множителя

$$\left(-x(\ln y + 2\ln x - 1)\frac{\partial\omega}{\partial x} - 2y\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = \mu(3 + \ln y + 2\ln x)$$

следует, что оно допускает $\omega = \ln x + 2\ln y$. Действительно, в этом случае $\mu' + \mu = 0$, откуда

$$\mu = e^{-\omega} = \frac{1}{xy^2}.$$

Разделив исходное уравнение на xy^2 $(x \neq 0,\ y \neq 0)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{2}{xy}\,dx - \frac{1}{y^2}(\ln y + 2\ln x - 1)\,dy = 0.$$

Общий интеграл уравнения имеет вид

$$\Phi(x, y) = \frac{2}{y}\int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^y \frac{\ln t - 1}{t^2}\,dt = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{\ln x^2 y}{y} = C. \text{ ▶}$$

152. $(x^2 + 1)(2x\,dx + \cos y\,dy) = 2x \sin y\,dx$.

◀ Полагая $x^2 + 1 = u$, $\sin y = v$, приводим уравнение к виду

$$(u - v)\,du + u\,dv = 0,$$

которое при $u \neq 0$ можно записать так:

$$\frac{du}{u} + \frac{u\,dv - v\,du}{u^2} = 0, \quad \text{т.е.} \quad d\left(\ln u + \frac{v}{u}\right) = 0.$$

Имеем $\ln u + \frac{v}{u} = \text{const}$. Следовательно,

$$(x^2 + 1)\ln(x^2 + 1) + \sin y = C(x^2 + 1). \text{ ▶}$$

153. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0$.

◀ Из уравнения для интегрирующего множителя

$$\left((x^3y^2 - x)\frac{\partial\omega}{\partial x} - (x^2y^3 + y)\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = 2\mu$$

усматривается возможность выбора $\omega = xy$. Тогда будем иметь $\omega\mu' + \mu = 0$, откуда

$$\mu = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{xy}.$$

Умножив исходное уравнение на $\mu(x, y)$, получим уравнение в полных дифференциалах:

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2y - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$\Phi(x, y) = \int_1^x \left(t + \frac{1}{t}\right)dt + \int_1^y \left(x^2t - \frac{1}{t}\right)dt = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{x^2}e^{-x^2y^2} = C.$$

Решение $y = 0$ следует из общего интеграла при $C = 0$. ▶

154. $(x^2 - y)\,dx + x(y + 1)\,dy = 0$.

◀ Применяем метод разбиения уравнения на два:

$$x^2\,dx + xy\,dy = 0 \quad \text{и} \quad x\,dy - y\,dx = 0.$$

Первое уравнение имеет интегрирующий множитель $\mu_1 = \frac{1}{x}$ и общий интеграл $u_1(x, y) \equiv x^2 + y^2 = C_1$, а второе уравнение — $\mu_2 = \frac{1}{x^2}$, $u_2(x, y) \equiv \frac{y}{x} = C_2$. Согласно указанному методу, интегрирующий множитель для исходного уравнения имеет вид

$$\mu = \frac{1}{x}\varphi_1\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{x^2}\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1}$$

где φ_1, φ_2 — произвольные дифференцируемые функции. Из (1) следует, что $x\varphi_1\left(x^2 + y^2\right) = \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)$. Положим $\varphi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Тогда получим

$$x\varphi_1\left(x^2 + y^2\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \quad (x > 0).$$

Следовательно, $\varphi_2(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$. Таким образом, $\mu(x, y) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + y^2}}$ $(x > 0)$. Умножив исходное уравнение на $\mu(x, y)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{x^2 - y}{x\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \frac{y + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy = 0.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = Ce^{-\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{y + \sqrt{x^2 + y^2}}e^{-\sqrt{x^2+y^2}} = C.$$

Частное решение $x = 0$ получаем при $C = 0$. Непосредственно можно убедиться, что множитель $\mu(x, y)$ пригоден и для $x < 0$. ▶

155. $y^2(y\,dx - 2x\,dy) = x^3(x\,dy - 2y\,dx)$.

◀ Аналогично предыдущему напишем уравнения

$$y^2(y\,dx - 2x\,dy) = 0 \quad \text{и} \quad x^3(x\,dy - 2y\,dx) = 0.$$

Тогда $\mu_1 = \frac{1}{xy^3}$, $u_1 \equiv \frac{y^2}{x} = C_1$; $\mu_2 = \frac{1}{x^4 y}$, $u_2 \equiv \frac{x^2}{y} = C_2$ — соответственно интегрирующие множители и интегралы этих уравнений. Интегрирующий множитель исходного уравнения ищем из соотношения

$$\mu = \frac{1}{xy^3}\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{1}{x^4 y}\varphi_2\left(\frac{x^2}{y}\right),$$

из которого следует, что

$$\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{y^2}{x^3}\varphi_2\left(\frac{x^2}{y}\right).$$

Полагаем $y^2 = xu$. Тогда

$$\varphi_1(u) = \frac{u}{x^2}\varphi_2\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{u}}\right) \quad (x > 0,\ u > 0).$$

Замечаем, что правая часть последнего равенства будет функцией только от u, если взять $\varphi_2(\alpha) = \alpha^{\frac{4}{3}}$. Таким образом,

$$\varphi_1(u) = \sqrt[3]{u} = y^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}, \quad \mu(x, y) = x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{7}{3}}.$$

Умножив обе части исходного уравнения на $\mu(x, y)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{5}{3}}y^{-\frac{4}{3}}\right)dx - \left(2x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{8}{3}}y^{-\frac{7}{3}}\right)dy = 0.$$

Взяв в последней формуле п. 5.1 $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, получим общий интеграл уравнения

$$\Phi(x, y) = \int_1^x \left(t^{-\frac{4}{3}} + 2t^{\frac{5}{3}}\right)dt - \int_1^y \left(2x^{-\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{8}{3}}t^{-\frac{7}{3}}\right)dt = \text{const},$$

$$x^3 - 4y^2 = C\sqrt[3]{xy^4}, \quad \text{или} \quad \frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{x^3 - 4y^2} = C.$$

Частные решения $x = 0$, $y = 0$ получаем при $C = 0$. ►

156. $\left(6x - 2y - 2y^2\right)dx + \left(5y^2 - 8xy - x\right)dy = 0.$

◄ Для отыскания интегрирующего множителя воспользуемся методом разделения уравнения на два:

$$(6x - 2y)\,dx - x\,dy = 0; \quad (5y^2 - 8xy)\,dy - 2y^2\,dx = 0.$$

Нетрудно установить, что интегрирующие множители этих уравнений, а также их интегралы имеют вид:

$$\mu_1 = x, \quad \mu_2 = y^2; \quad u_1 \equiv 2x^3 - x^2 y = C_1, \quad u_2 \equiv 2y^4 x - y^5 = C_2.$$

Согласно указанному методу, интегрирующий множитель данного уравнения ищем из соотношения

$$\mu = x\varphi_1(2x^3 - x^2 y) = y^2\varphi_2(2y^4 x - y^5).$$

Отсюда

$$\varphi_1(2x^3 - x^2 y) = \frac{y^2}{x}\varphi_2(2y^4 x - y^5).$$

Полагая здесь $y^2 = ux$, получаем

$$\varphi_1\left(2\frac{y^6}{u^3} - \frac{y^5}{u^2}\right) = u\varphi_2\left(2\frac{y^6}{u} - y^5\right),$$

или

$$\varphi_1(\alpha) = u\varphi_2(u^2\alpha), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{2y^6}{u^3} - \frac{y^5}{u^2}.$$

Пусть $\varphi_2(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ $(z > 0)$. Тогда

$$\varphi_2(u^2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{u^2\alpha}} = \frac{1}{u\sqrt{\alpha}} \quad (u > 0).$$

Следовательно,

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \mu(x, y) = \frac{x}{\sqrt{2x^3 - x^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{2x - y}} \quad (2x > y).$$

Заметим, что для $2x < y$ аналогично можно найти $\mu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - 2x}}$.

В обоих случаях после интегрирования уравнения в полных дифференциалах и упрощений получаем ответ

$$(2x - y)(x - y^2)^2 = C. ▶$$

157. $x\,dx + (xy - y^3)\,dy = 0.$

◀ Целесообразно записать уравнение в форме

$$x\,dx + x\,d\left(\frac{y^2}{2}\right) - d\left(\left(\frac{y^2}{2}\right)^2\right) = 0$$

и положить $\frac{y^2}{2} = u$. Тогда получим

$$x\,dx + (x - 2u)\,du = 0.$$

Уравнение для интегрирующего множителя этого уравнения имеет вид:

$$\left((x - 2u)\frac{\partial\omega}{\partial x} - x\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = -\mu.$$

Если взять $\omega = x - u$, то отсюда получим уравнение $2\omega\mu' + \mu = 0$. Следовательно, $\mu = |\omega|^{-\frac{1}{2}} = (|x - u|)^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому левая часть уравнения

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{|x - u|}} + \frac{x - 2u}{\sqrt{|x - u|}}\,du = 0$$

является полным дифференциалом некоторой функции Φ. Выбирая $x_0 \neq 0$, $u_0 = 0$, получим общий интеграл уравнения в виде

$$\Phi(x, u) = \int_{x_0}^{x} \frac{t\,dt}{\sqrt{|t|}} + \int_{0}^{u} \frac{x - 2t}{\sqrt{|x - t|}}\,dt = \text{const}.$$

После интегрирования и перехода к переменным x и y, общий интеграл исходного уравнения примет вид

$$\operatorname{sgn}\left(2x - y^2\right)\sqrt{|2x - y^2|}\left(x + y^2\right) = C, \quad \text{или} \quad \left(2x - y^2\right)\left(x + y^2\right)^2 = C. ▶$$

158. $y^3\,dx + 2(x^2 - xy^2)\,dy = 0.$

◀ Для каждого из уравнений

$$y^3\,dx - 2xy^2\,dy = 0; \quad 2x^2\,dy = 0$$

находим $\mu_1 = \frac{1}{xy^3}$, $u_1 = \frac{x}{y^2}$; $\mu_2 = \frac{1}{x^2}$, $u_2 = y$.

Следовательно, интегрирующий множитель для исходного уравнения удовлетворяет соотношению

$$\mu = \frac{1}{xy^3}\varphi_1\left(\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{x^2}\varphi_2(y).$$

Если взять $\varphi_2(y) = y^{-1}$, то получим, что $\varphi_1(\alpha) = \alpha^{-1}$. Таким образом, $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 y}$ и

$$\frac{y^2}{x^2}\,dx + 2\left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x}\right)\,dy = 0$$

— уравнение в полных дифференциалах. Записав его общий интеграл в виде

$$\Phi(x, y) = \int_1^x \frac{dt}{t^2} + 2\int_1^y \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{x}\right) dt = \text{const},$$

получим общее решение

$$y^2 = Ce^{\frac{y^2}{x}}. \blacktriangleright$$

159. $(y - x)\,dy + y\,dx - x\,d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$

◀ Для уравнения $(y - x)\,dy + y\,dx = 0$ интегрирующим множителем является функция $\mu_1 = y^{-2}$, а интегралом — $u_1 = ye^{\frac{x}{y}}$. Для уравнения $x\,d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ интегрирующим множителем является функция $\mu_2 = \frac{1}{x}$, а интегралом — $u_2 = \frac{x}{y}$. В соответствии с методом разбиения имеем

$$\mu = \frac{1}{y^2}\varphi_1\left(ye^{\frac{x}{y}}\right) = \frac{1}{x}\varphi_2\left(\frac{x}{y}\right).$$

Если положим $\varphi_1(\alpha) = \alpha$, то отсюда получим, что $\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} = \varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)$. Следовательно, $\mu = \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$ есть интегрирующий множитель для данного уравнения, которое после умножения на μ принимает вид

$$e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y^2}\right) dx + \left(1 - \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^3}\right) e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int_0^x e^{\frac{t}{y}}\left(1 - \frac{t}{y^2}\right) dt + \int_{y_0}^y dt = \text{const} \quad (y_0 \neq 0),$$

$$y^2 + y - x = Cye^{-\frac{x}{y}}, \quad \text{или} \quad \frac{y}{y^2 + y - x}e^{-\frac{x}{y}} = C. \blacktriangleright$$

160. $(6xy^2 + x^2)\,dy - y(3y^2 - x)\,dx = 0.$

◀ Поскольку уравнение $6xy^2\,dy - 3y^2\,dx = 0$ имеет интегрирующий множитель $\mu_1 = \frac{1}{3xy^3}$ и интеграл $u_1 = \frac{y^2}{x}$, а уравнение $x^2\,dy + xy\,dx = 0$ — интегрирующий множитель $\mu_2 = \frac{1}{x^2y}$ и интеграл $u_2 = xy$, то, согласно методу разбиения на две части, интегрирующий множитель исходного уравнения ищем в виде

$$\mu = \frac{1}{3xy^3}\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{1}{x^2y}\varphi_2(xy),$$

откуда находим $\frac{x}{3y^2}\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \varphi_2(xy)$. Полагая $\varphi_2 \equiv \frac{1}{3}$, получаем $\varphi_1\left(\frac{y^2}{x}\right) = \frac{y^2}{x}$. Следовательно, $\mu = \frac{1}{x^2y}$. Умножив данное уравнение на $\mu(x, y)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(3\frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx - \left(6\frac{y}{x} + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$$

Его общий интеграл запишем в виде

$$\Phi(x, y) = \int_1^x \left(\frac{3}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt - \int_1^y \left(6\frac{t}{x} + \frac{1}{t}\right) dt = \text{const}.$$

Вычислив интегралы, окончательно получим

$$e^{\frac{3y^2}{x}}yx = C. \blacktriangleright$$

§ 6. Уравнение Эйлера—Риккати

6.1. Уравнение Эйлера—Риккати. Специальное уравнение Риккати.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{1}$$

называется *уравнением Эйлера—Риккати.* Если положить $P(x) = bx^\alpha$, $Q(x) \equiv 0$, $R(x) = -a$, где a, b, α — постоянные, то уравнение (1) примет вид

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha. \tag{2}$$

Оно называется *специальным уравнением Риккати.* Уравнение Эйлера—Риккати, вообще говоря, не интегрируется в квадратурах. Даже специальное уравнение Риккати приводится к квадратурам только в том случае, когда $\alpha = \frac{4k}{\pm 1 - 2k}$, где k — целое или ∞. Если равенство $\alpha = \frac{4k}{1-2k}$ выполняется при $k > 0$, то в (2) делаем замену $y = \frac{u}{x^2} + \frac{1}{ax}$, приводящую (2) к виду

$$\frac{du}{dx} + \frac{au^2}{x^2} = bx^{\alpha+2}.$$

Полагая далее $u = \frac{1}{v}$, имеем

$$\frac{dv}{dx} + bx^{\alpha+2}v^2 = ax^{-2}.$$

Наконец, после замены $x^{\alpha+3} = z$ приходим к уравнению

$$\frac{dv}{dz} + \frac{b}{\alpha+3}v^2 = \frac{a}{\alpha+3}z^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}.$$

Эти преобразования проводим до тех пор, пока не получим уравнение с разделяющимися переменными.

Если равенство $\alpha = \frac{4k}{1-2k}$ выполняется при $k < 0$, то указанные преобразования следует проводить в обратном порядке.

6.2. Каноническое уравнение Эйлера—Риккати.

Уравнение

$$u' = \pm u^2 + w(x) \tag{3}$$

называется *каноническим уравнением Эйлера—Риккати.* Если в (1) функция R дважды дифференцируема, то с помощью замен

$$y = \alpha(x)z, \quad z = u + \beta(x) \tag{4}$$

уравнение (1) приводится к каноническому виду. Иногда форма (3) позволяет сравнительно легко установить частное решение уравнения (1).

Если $y_1(x)$ — частное решение уравнения (1), то заменой $y = y_1 + \frac{1}{z}$ уравнение Эйлера—Риккати приводится к линейному.

Путем подбора частного решения решить уравнения.

161. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$.

◀ Ищем частное решение в виде $y_1(x) = \frac{a}{x}$, где $a = \text{const}$. Подставив его в данное уравнение, получаем

$$-a + a + a^2 = 4 \quad \text{откуда} \quad a = \pm 2.$$

Пусть $a = 2$. Тогда, произведя замену $y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z}$, имеем линейное уравнение

$$x^2z' - 5xz - x^2 = 0.$$

Интегрируя его, находим $z = Cx^5 - \frac{x}{4}$. Следовательно,

$$y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}$$

есть общее решение исходного уравнения. Частное решение $y_1 = \frac{2}{x}$ получается отсюда при $C = \infty$. ▶

162. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$.

◀ Частное решение $y_1(x)$ ищем в виде $y_1(x) = ax + b$. Подставив его в уравнение, получаем тождество относительно x:

$$ax - (2x+1)(ax+b) + (ax+b)^2 \equiv -x^2,$$

из которого следует, что $2ab - 2b = 0$; $a = 1$; $-b + b^2 = 0$. Возможны два решения последней системы уравнений: $a = b = 1$ или $a = 1$, $b = 0$. Пусть $a = 1$, $b = 0$. Тогда $y_1(x) = x$ есть частное решение. Производя замену $y = x + \frac{1}{z}$, получаем линейное уравнение

$$x\left(1 - \frac{z'}{z}\right) - (2x+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) + \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 = -x^2,$$

или

$$xz' + z - 1 = 0.$$

Интегрируя его, находим $z = 1 + \frac{C}{x}$, вследствие чего

$$y = x + \frac{x}{x+C}. \ ▶$$

163. Выразить общее решение уравнения Эйлера—Риккати через три различных его решения.

◀ Если известно одно частное решение уравнения Эйлера—Риккати $y_1(x)$, то его общее решение имеет вид

$$y = y_1(x) + \frac{1}{z(x)},$$

где $z(x)$ — общее решение соответствующего линейного уравнения первого порядка. Так как общее решение последнего выражается через две функции, т. е. $z(x) = \alpha(x) + C\beta(x)$, то общее решение уравнения Эйлера—Риккати представляется в виде

$$y = y_1(x) + \frac{1}{\alpha(x) + C\beta(x)}. \tag{1}$$

Пусть $y_2(x)$, $y_3(x)$ — частные решения рассматриваемого уравнения. Тогда из (1) следует, что

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{\alpha + C_1\beta}, \quad y_3 = y_1 + \frac{1}{\alpha + C_2\beta}, \tag{2}$$

где C_1, C_2 — постоянные, соответствующие частным решениям $y_2(x)$ и $y_3(x)$ ($C_1 \neq C_2$). Разрешив систему уравнений (2) относительно α и β и подставив их значения в (1), получим

$$y = \frac{y_2(y_3 - y_1) + \widetilde{C} y_1(y_3 - y_2)}{y_3 - y_1 + \widetilde{C}(y_3 - y_2)},$$

где $\widetilde{C} = \frac{C - C_1}{C_1 - C_2}$ — произвольная постоянная. ▶

Решить уравнения.

164. $y' + y^2 = 2x^{-4}$.

◀ Это специальное уравнение Риккати. Так как $\alpha = -4$, то $k = 1$ — целое. Следовательно, его можно привести к квадратурам. Произведем замену

$$y = \frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \quad (a = 1).$$

Тогда получим уравнение

$$u'x^2 + u^2 = 2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2} + u}{\sqrt{2} - u}\right| + \frac{1}{x} = \ln C.$$

Окончательно имеем

$$\frac{\sqrt{2}+x(xy-1)}{\sqrt{2}+x(1-xy)}e^{\frac{2\sqrt{2}}{x}}=C. \blacktriangleright$$

165. $y'-y^2=2x^{-\frac{12}{5}}$.

◀ Это также специальное уравнение Риккати. Так как $k=3$, то в данном случае придется провести указанные в п. 6.1 преобразования трижды. Итак, полагая $y=\frac{u}{x^2}-\frac{1}{x}$, получаем

$$\frac{du}{dx}-\frac{u^2}{x^2}=2x^{-\frac{2}{5}}.$$

Произведя замены $u=\frac{1}{v}$, $x^{\frac{3}{5}}=z$, снова имеем специальное уравнение Риккати

$$\frac{dv}{dz}+\frac{10}{3}v^2=-\frac{5}{3}z^{-\frac{8}{3}}.$$

Выполняя эти же замены повторно, получаем:

$$\frac{dv_1}{dz_1}-5v_1^2=10z_1^{-4},$$

где $z_1=z^{\frac{1}{3}}$, $v=\frac{1}{v_1z^2}+\frac{3}{10z}$. Применение проведенных преобразований еще раз приводит к уравнению

$$\frac{dv_2}{dz_2}-10v_2^2=5,$$

где $z_2=z_1^{-1}$, $v_1=\frac{1}{v_2z_1^2}-\frac{1}{5z_1}$. Решая последнее уравнение, находим

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(5\sqrt{2}z_2+C\right).$$

Возвращаясь к переменным x и y, окончательно получаем:

$$y=x^{-1}\frac{\sqrt{2}\left(x^{-\frac{1}{5}}-0{,}3x^{\frac{1}{5}}\right)\operatorname{ctg}\left(5\sqrt{2}x^{-\frac{1}{5}}+C\right)+0{,}3x^{\frac{2}{5}}-1{,}2}{0{,}3\sqrt{2}x^{\frac{1}{5}}\operatorname{ctg}\left(5\sqrt{2}x^{-\frac{1}{5}}+C\right)-0{,}06x^{\frac{2}{5}}+1}. \blacktriangleright$$

166. $y'+y^2=x^{-\frac{4}{3}}$.

◀ Здесь $\alpha_1=-\frac{4}{3}$, следовательно, $k=-1$. Рассматриваем данное уравнение как такое, которое получено в результате проделанных в предыдущих примерах преобразований. Таким образом, можем написать (см. п. 6.1):

$$\frac{b}{\alpha+3}=1;\quad \frac{a}{\alpha+3}=1;\quad \frac{\alpha+4}{\alpha+3}=\frac{4}{3}.$$

Из этих равенств следует, что $\alpha=0$, $a=b=3$. Теперь видим, что в уравнении

$$y'+3y^2=3 \tag{1}$$

были проведены замены по формулам

$$y=\frac{u}{x^2}+\frac{1}{3x},\quad u=\frac{1}{v},\quad x^3=z, \tag{2}$$

в результате чего получилось уравнение

$$\frac{dv}{dz}+v^2=z^{-\frac{4}{3}},$$

т. е. исходное уравнение.

Решая уравнение (1), получаем

$$\left(\frac{1+y}{1-y}\right)e^{-6x}=C, \quad \text{или} \quad \frac{v\left(3z^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{1}{3}}\right)+3}{v\left(z^{\frac{1}{3}}-3z^{\frac{2}{3}}\right)+3}e^{-6\sqrt[3]{z}}=C.$$

Поскольку в исходном уравнении через y обозначена функция, а через x — аргумент, то его общим интегралом будет

$$\frac{y\left(x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}\right)+3}{y\left(x^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{2}{3}}\right)+3}e^{-6\sqrt[3]{x}}=C. ▶$$

167. $y'-y^2=2x^{-\frac{8}{5}}$.

◀ В этом специальном уравнении Риккати $k=-2$, следовательно, потребуется провести два обратных преобразования над ним. Из уравнений

$$\frac{b}{\alpha+3}=-1; \quad \frac{a}{\alpha+3}=2; \quad \frac{\alpha+4}{\alpha+3}=\frac{8}{5}$$

следует, что данное уравнение получено в результате преобразования уравнения

$$y_1'+\frac{10}{3}y_1^2=-\frac{5}{3}x_1^{-\frac{4}{3}} \tag{1}$$

по формулам $y_1=\frac{u}{x_1^2}+\frac{3}{10x_1}$, $u=\frac{1}{y}$, $x_1^{\frac{5}{3}}=x$. В свою очередь, смотрим на уравнение (1) как на такое, которое получено в результате преобразования уравнения

$$\frac{dy_2}{dx_2}-5y_2^2=10 \tag{2}$$

посредством замен $y_2=\frac{v}{x_2^2}-\frac{1}{5x_2}$, $v=\frac{1}{y_1}$, $x_2^3=x_1$.

Решив уравнение (2), получаем

$$y_2=\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(5\sqrt{2}x_2+C\right).$$

Возвращаясь к переменным x и y, окончательно имеем

$$\frac{yx^{\frac{3}{5}}\left(50x^{\frac{2}{5}}-3\right)-10}{5\sqrt{2}x^{\frac{1}{5}}\left(10+3y^{\frac{3}{5}}\right)}=\operatorname{tg}\left(5\sqrt{2}x^{\frac{1}{5}}+C\right). ▶$$

168. $xy'-5y-y^2=x^2$.

◀ Сначала заметим, что специальное уравнение Риккати (2), п. 6.1, после замен $y=\frac{u}{x}$ и $x^{\alpha+2}=t$ переходит в следующее:

$$t\frac{du}{dt}-\frac{u}{\alpha+2}+\frac{a}{\alpha+2}u^2=\frac{b}{\alpha+2}t \quad (\alpha\neq-2), \tag{1}$$

или

$$tu'+lu+mu^2=nt. \tag{1'}$$

В исходном уравнении заменим аргумент, полагая $x^2=t$. Тогда получим (переобозначив y через u):

$$t\frac{du}{dt}-\frac{5}{2}u-\frac{u^2}{2}=\frac{t}{2}. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), находим: $\alpha=-\frac{8}{5}$, $a=-\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{5}$.

Таким образом, между исходным уравнением и специальным уравнением Риккати установлена связь, причем, поскольку $\alpha=-\frac{8}{5}=\frac{4k}{1-2k}$ при $k=-2$, то первое интегрируется в квадратурах и его общий интеграл можно получить методом преобразований, которые применялись выше. Однако мы применим иной подход к интегрированию уравнений (1′).

Сущность метода состоит в следующем.

Если $mn \neq 0$ и $l \neq -\frac{1}{2}$, то уравнение (1') можно преобразовать двумя путями:

1) применив подстановку $u = \frac{t}{p+v}$, где $p = \frac{1+l}{n}$, получим

$$tv' + (l+1)v + nv^2 = mt;$$

2) подстановкой $u = q + \frac{t}{v}$, где $q = -\frac{l}{n}$, приводим уравнение (1') к виду

$$tv' + (l-1)v + nv^2 = mt.$$

Если $m = 0$ или $n = 0$, то уравнение (1') превращается в линейное уравнение или в уравнение Бернулли соответственно.

Если $l = -\frac{1}{2}$, то его можно представить в виде

$$-\sqrt{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{u}\right)' + m = n\left(\frac{\sqrt{t}}{u}\right)^2, \tag{3}$$

после чего оно интегрируется в квадратурах. Отсюда следует, что преобразования целесообразно проводить тем из указанных выше способов, который приведет к уравнению (3). В принципе это возможно только в том случае, когда $l = \omega + \frac{1}{2}$, где ω — целое число.

В данном примере $l = -\frac{5}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, $\omega = -3$, поэтому выбираем первый путь. Имеем

$$u = \frac{t}{v-3}; \quad tv' - \frac{3}{2}v + \frac{v^2}{2} = -\frac{t}{2}.$$

В полученном уравнении $l = -\frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{1}{2}$. Применив замену $v = \frac{t}{w+1}$, получим

$$tw' - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}w^2 = \frac{t}{2}.$$

В последнем уравнении $l = -\frac{1}{2}$, поэтому оно приводится к уравнению вида (3):

$$-\sqrt{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{w}\right)' - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{t}}{w}\right)^2,$$

которое имеет общее решение $w = \sqrt{t}\operatorname{ctg}(-\sqrt{t} + C)$. Возвращаясь к переменным x и y, окончательно имеем

$$y = \frac{x^2}{v-3}; \quad v = \frac{x^2}{w+1}; \quad w = x\operatorname{ctg}(C - x). \ ►$$

169. $xy' + 3y + y^2 = x^2$.

◄ По аналогии с решением предыдущего примера, посредством замены $x^2 = t$ приводим уравнение к виду

$$ty' + \frac{3}{2}y + \frac{y^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

Поскольку $l = \frac{3}{2} > 0$, то к полученному уравнению применяем второй путь преобразований, указанный в примере 168. Имеем

$$y = -3 + \frac{t}{u}; \quad tu' + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

Еще раз применяем указанное преобразование:

$$u = -1 + \frac{t}{v}; \quad tv' - \frac{v}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$-\sqrt{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{v}\right)' + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{t}}{v}\right)^2,$$

откуда находим $v = \sqrt{t}\,\mathrm{cth}(\sqrt{t} + C)$. Таким образом, общим решением исходного уравнения является

$$y = -3 + \frac{x^2}{x\,\mathrm{th}(x + C) - 1}. \blacktriangleright$$

170. $3xy' - 9y - y^2 = x^{\frac{2}{3}}$.

◀ Полагая $x^{\frac{2}{3}} = t$, получаем

$$t\frac{dy}{dt} - \frac{9}{2}y - \frac{y^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

Поскольку $l = -\frac{9}{2}$, то применяем цепочку преобразований:

$$y = \frac{t}{v-7}; \qquad tv' - \frac{7}{2}v + \frac{v^2}{2} = -\frac{t}{2}; \qquad v = \frac{t}{w+5}; \qquad tw' - \frac{5}{2}w - \frac{w^2}{2} = \frac{t}{2};$$
$$w = \frac{t}{\varkappa - 3}; \qquad t\varkappa' - \frac{3}{2}\varkappa + \frac{\varkappa^2}{2} = -\frac{t}{2}; \qquad \varkappa = \frac{t}{\psi + 1}; \qquad t\psi' - \frac{\psi}{2} - \frac{\psi^2}{2} = \frac{t}{2}.$$

Из последнего уравнения получаем $\psi = \sqrt{t}\,\mathrm{ctg}\left(C - \sqrt{t}\right)$. Совершить переход к переменным x и y предлагаем читателю. ▶

171. $\frac{dy}{dx} + \frac{5}{x}y + \frac{3}{x}y^2 = x$.

◀ Произведя замену $x^2 = t$, получим:

$$t\frac{dy}{dt} + \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}y^2 = \frac{t}{2}.$$

Поскольку $l = \frac{5}{2} > 0$, то применяем второй путь преобразований, указанный в примере 168. Имеем

$$y = \frac{t}{v} - \frac{5}{3}; \qquad t\frac{dv}{dt} + \frac{3}{2}v + \frac{v^2}{2} = \frac{3}{2}t;$$
$$v = \frac{t}{w} - 3; \qquad t\frac{dw}{dt} + \frac{w}{2} + \frac{3}{2}w^2 = \frac{t}{2};$$
$$w = \frac{t}{\varkappa} - \frac{1}{3}; \qquad t\frac{d\varkappa}{dt} - \frac{\varkappa}{2} + \frac{\varkappa^2}{2} = \frac{3}{2}t.$$

Записав последнее уравнение в виде

$$-\sqrt{t}\left(\frac{\sqrt{t}}{\varkappa}\right)' + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{t}}{\varkappa}\right)^2$$

и решив его, получаем $\varkappa = \sqrt{3t}\,\mathrm{cth}(\sqrt{3t} + C)$.

Обратный переход по цепочке вверх к переменным x и y не составляет трудностей. ▶

172. $y' + \frac{3}{x}y + xy^2 = \frac{1}{x}$.

◀ Приведем уравнение к каноническому виду. Сначала посредством замены $y = \alpha(x)z$ добьемся того, чтобы коэффициент при z^2 был равен единице. Имеем

$$z'\alpha + \alpha' z + \frac{3}{x}\alpha z + x\alpha^2 z^2 \equiv \frac{1}{x}, \tag{1}$$

откуда $\alpha(x) = \frac{1}{x}$. Поэтому из (1) следует, что $z' + \frac{2}{z}z + z^2 = 1$. Далее, заменой $z = u + \beta(x)$ последнее уравнение преобразуем так, чтобы в нем отсутствовала искомая функция u в первой степени. Имеем

$$u' + \beta' + \frac{2}{x}(u + \beta) + u^2 + 2u\beta + \beta^2 \equiv 1.$$

Взяв $\beta(x) = -\frac{1}{x}$, получим каноническое уравнение Эйлера—Риккати

$$u' + u^2 = 1,$$

которое имеет общее решение $u = \operatorname{th}(x + C)$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{x}\left(\operatorname{th}(x + C) - \frac{1}{x}\right). \blacktriangleright$$

§ 7. Уравнения, не разрешенные относительно производной

7.1. Уравнение, не разрешенное относительно производной.

Уравнение вида $F(x, y, y') = 0$, где F — известная функция, называется *уравнением, не разрешенным относительно производной.*

Если функция F — многочлен степени n относительно производной, то уравнение $F = 0$ называется *уравнением первого порядка n-ой степени* и имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x, y){y'}^k = 0, \tag{1}$$

где p_k — известные функции. Разрешив уравнение (1) относительно y', получим:

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = \overline{1, n}). \tag{2}$$

Пусть уравнения (2) имеют общие интегралы

$$\varphi_k(x, y) = C_k \quad (k = \overline{1, n}).$$

Тогда общим интегралом уравнения (1) будет

$$(\varphi_1(x, y) - C_1)(\varphi_2(x, y) - C_2) \ldots (\varphi_n(x, y) - C_n) = 0. \tag{3}$$

7.2. Общий интеграл уравнения $F(y') = 0$.

Уравнение $F(y') = 0$ имеет общий интеграл $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$, причем, если $F(y') \equiv 0$ на некоторых частях области определения функции F, то отношение $\frac{y-c}{x}$ будем считать произвольной функцией от x со значениями на этих же частях.

7.3. Представление решения в параметрической форме. Разрешение неполных уравнений.

Пусть для уравнения $F(x, y, y') = 0$ существуют такие функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $y' = g(u, v)$, что $F(\varphi(u, v), \psi(u, v), g(u, v)) \equiv 0$ относительно параметров u и v из некоторой области их задания. Тогда, используя соотношение $dy = y'\,dx$, получаем

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv = g(u, v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv\right),$$

откуда

$$\frac{dv}{du} = f(u, v). \tag{4}$$

Если уравнение (4) имеет общее решение $v = \alpha(u, C)$, то общее решение исходного уравнения записывается в параметрической форме

$$x = \varphi\left(u, \alpha(u, C)\right), \quad y = \psi\left(u, \alpha(u, C)\right). \tag{5}$$

Неполные уравнения $F(x, y') = 0$ и $F(y, y') = 0$ приводятся к квадратурам, если их можно разрешить относительно x или y соответственно. Если, например, $x = \varphi(y')$, то вводим параметр p по формуле $y' = p$. Тогда $x = \varphi(p)$ и $dy = p\,dx = p\varphi'(p)\,dp$, откуда $y = \int p\varphi'(p)\,dp + C$. Аналогично поступаем в случае, когда уравнение $F(y, y') = 0$ можно разрешить относительно y.

Найти общие интегралы уравнений.

173. $y'^2 - (3x - 2y)y' + 2x^2 - xy - 3y^2 = 0.$

◀ Решая это квадратное уравнение относительно производной, получаем два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$y' = 2x - 3y \quad \text{и} \quad y' = x + y.$$

Оба уравнения линейные, поэтому их общие решения находим без труда:

$$y = C_1 e^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} \quad \text{и} \quad y = C_2 e^x - x - 1.$$

Общий интеграл исходного уравнения можно записать в виде (3), п. 7.1:

$$\left(\left(y - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right)e^{3x} - C_1\right)\left((y + x + 1)e^{-x} - C_2\right) = 0. \ ▶$$

174. $y'^3 - \left(x^2 + xy + y^2\right)y' + xy(x + y) = 0.$

◀ Уравнение допускает очевидное решение $y' = x$. Остальные решения находим из квадратного уравнения $y'^2 + xy' - (x + y)y = 0$:

$$y' = y \quad \text{и} \quad y' = -x - y.$$

Общие решения полученных дифференциальных уравнений соответственно имеют вид

$$y = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = C_2 e^x, \quad y = C_3 e^{-x} - x + 1.$$

Общим интегралом исходного уравнения будет

$$\left(y - \frac{x^2}{2} - C_1\right)\left(ye^{-x} - C_2\right)\left((y + x - 1)e^x - C_3\right) = 0. \ ▶$$

175. $y'^3 \sin x - (y \sin x - \cos^2 x)y'^2 - (y\cos^2 x + \sin x)y' + y \sin x = 0.$

◀ Очевидное решение $y' = \sin x$ позволяет найти другие два решения кубического уравнения: $y' = y$ и $y' = -\frac{1}{\sin x}$. Решив полученные дифференциальные уравнения, имеем

$$y = -\cos x + C_1, \quad y = C_2 e^x, \quad y = \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| + C_3.$$

Следовательно, общий интеграл данного уравнения записывается в виде

$$(y + \cos x - C_1)(ye^{-x} - C_2)\left(y - \ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right| - C_3\right) = 0. \ ▶$$

Найти решения уравнений.

176. $x^3y'^2 + x^2yy' + a = 0.$

◀ Решив уравнение относительно y

$$y = -\frac{a}{x^2y'} - xy', \tag{1}$$

вводим параметр p по формуле $y' = p$. Тогда из (1) следует, что

$$y = -\frac{a}{x^2p} - xp. \tag{2}$$

Для выражения x через p воспользуемся равенством $dy = p\,dx$. Дифференцируя (2) и принимая во внимание указанное равенство, получаем:

$$p\,dx = \frac{2a}{x^3p}\,dx + \frac{a}{x^2p^2}\,dp - x\,dp - p\,dx,$$

откуда

$$\left(\frac{2a}{x^3p} - 2p\right) dx + \left(\frac{a}{x^2p^2} - x\right) dp = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{a}{x^2p^2} - x\right)\left(dp + \frac{2p}{x}\,dx\right) = 0.$$

Очевидно, последнее уравнение имеет решения $x = \sqrt[3]{\frac{a}{p^2}}$ и $x = \frac{C}{\sqrt{|p|}}$. Подставив их в (2), находим $y = -2\sqrt[3]{pa}$ и $y = -\frac{a}{C^2}\operatorname{sgn} p - C\sqrt{|p|}$. Получили все решения в параметрической форме. Исключив параметр p, получаем эти же решения в явном виде:

$$x = \frac{4a}{y^2} \quad \text{и} \quad y = \frac{a}{c} + \frac{c}{x}. \blacktriangleright$$

177. $9yy'^2 + 4x^3y' - 4x^2y = 0.$

◀ Полагая $y' = p$ и разрешая уравнение относительно y, получаем:

$$y = \frac{4x^3p}{4x^2 - 9p^2}. \tag{1}$$

Дифференцируя (1) и принимая во внимание равенство $dy = p\,dx$, находим:

$$p\,dx = 4\,\frac{\left(12x^4p - 27x^2p^3 - 8px^4\right)dx + \left(4x^5 + 9p^2x^3\right)dp}{(4x^2 - 9p^2)^2},$$

или $9p^3\,dx = 4x^3\,dp$ (считаем, что $4x^2+9p^2 \neq 0$). Из последнего уравнения следует, что $4x^2-9p^2 = 4Cx^2p^2$, поэтому из (1) окончательно получаем:

$$y^2 = Cx^2 + \frac{9}{4}C^2. \blacktriangleright$$

178. $y'^3 - xy^4y' - y^5 = 0.$

◀ В данном случае уравнение удобно разрешить относительно x:

$$x = \frac{y'^2}{y^4} - \frac{y}{y'}. \tag{1}$$

Полагая в (1) $y' = p$ и продифференцировав полученное, имеем

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{2p\,dp}{y^4} - \frac{4p^2\,dy}{y^5} - \frac{dy}{p} + \frac{y\,dp}{p^2},$$

откуда

$$\left(2\,dy - \frac{y}{p}\,dp\right)\left(\frac{1}{p} + \frac{2p^2}{y^5}\right) = 0.$$

Из этого уравнения находим:

$$p = Cy^2 \quad \text{и} \quad p = -y\sqrt[3]{\frac{y^2}{2}}.$$

Подставим значения $y' = p$ в (1). Получим

$$x = C^2 - \frac{1}{Cy} \quad \text{и} \quad x = \left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) y^{-\frac{2}{3}}. \blacktriangleright$$

179. $x = y'\sin y'.$

◀ Уравнение разрешено относительно x, поэтому можно ввести параметр $p = y'$. Тогда $x = p\sin p$ и остается выразить y через p. Воспользовавшись связью $dy = p\,dx$, имеем

$$dy = p\,d(p\sin p) = p(\sin p + p\cos p)\,dp.$$

Отсюда интегрированием получаем

$$y = p^2\sin p + p\cos p - \sin p + C.$$

Таким образом, имеем общее решение в параметрической форме:

$$x = p\sin p, \quad y = p^2\sin p + p\cos p - \sin p + C. \blacktriangleright$$

180. $y = (2 + y')\sqrt{1 - y'}$.

◄ Как и в предыдущем примере, вводим параметр $y' = p$. Тогда $y = (2+p)\sqrt{1-p}$. Так как $dx = \frac{1}{p}\,dy$, а $dy = d\left((2+p)\sqrt{1-p}\right)$, то

$$dx = \frac{1}{p}\,d\left((2+p)\sqrt{1-p}\right) = -\frac{3p}{2\sqrt{1-p}}.$$

Отсюда интегрированием находим $x = 3\sqrt{1-p} + C$. Если исключим параметр p из выражений для x и y, то получим общее решение

$$y = x + C - \frac{1}{27}(x+C)^3. ►$$

181. $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

◄ Полагая $y' = tx(t)$, где t — параметр, находим

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y' = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Из последнего равенства следует, что $dy = \frac{3t^2}{1+t^3}\,dx$. Поскольку $dx = 3\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\,dt$, то $dy = 9\frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt$. Интегрируя, получаем

$$y(t) = \frac{3}{2}\,\frac{4t^3+1}{(1+t^3)^2} + C$$

— общее решение исходного уравнения в параметрической форме. ►

182. $y'^5 - 8y'^4 + 9y'^3 - 7y'^2 + 6y' + 1 = 0$.

◄ Пусть a_k ($k = \overline{1,5}$) — корни уравнения $a^5 - 8a^4 + 9a^3 - 7a^2 + 6a + 1 = 0$. Тогда $y' = a_k$ и $y = a_kx + C$, или $\frac{y-C}{x} = a_k$. Поскольку a_k — корни указанного уравнения, то должно быть

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^5 - 8\left(\frac{y-C}{x}\right)^4 + 9\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 - 7\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + 6\left(\frac{y-C}{x}\right) + 1 = 0.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения. ►

183. $y' = 10\sin y'$.

◄ Поскольку $y' = a_k$, где a_k — корни уравнения $a = 10\sin a$, то $y = a_kx + C$, и общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид:

$$y - C = 10x\sin\frac{y-C}{x}. ►$$

184. $y' + |y'| = 0$.

◄ Это уравнение выполняется для всех $y' \leqslant 0$. Поэтому, полагая $y' = \varphi(x)$, где φ — любая неположительная функция, имеем:

$$y = \int \varphi(x)\,dx + C = -\int |\varphi(x)|\,dx + C.$$

Следовательно,

$$y = \frac{1}{2}\int \left(\varphi(x) - |\varphi(x)|\right)dx + C$$

есть решение данного уравнения. ►

185. $x^{y'} = y'^{x}$.

◄ Уравнение имеет одно очевидное решение $y' = x$; $y = C + \frac{x^2}{2}$. Кроме того, имеются и другие решения, которые представим в параметрическом виде. Для этого положим $y' = x^t$. Тогда получим

$$x = t^{\frac{1}{t-1}}, \quad y' = t^{\frac{t}{t-1}} \quad (t \neq 1).$$

Отсюда

$$dy = t^{\frac{t}{t-1}}\,dx = t^{\frac{t}{t-1}}\,d\left(t^{\frac{1}{t-1}}\right) = \frac{t^{\frac{t+1}{t-1}}}{t-1}\left(\frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t-1}\right)dt.$$

Интегрируя последнее соотношение, находим

$$y = \int t^{\frac{t+1}{t-1}}\left(\frac{1}{t} - \frac{\ln t}{t-1}\right)\frac{dt}{t-1} + C. \blacktriangleright$$

186. $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$.

◀ Разрешив уравнение относительно x и полагая $y' = p$, получим $x = \frac{y}{p}\ln p$. Так как $dy = p\,dx$, то

$$dy = p\,d\left(\frac{y}{p}\ln p\right) = \frac{y}{p}\,dp + \ln p\,dy - \frac{y}{p}\ln p\,dp, \quad \text{или} \quad (1 - \ln p)\left(dy - \frac{y}{p}\,dp\right) = 0.$$

Из последнего уравнения находим $p = e$ и $p = Cy$. Таким образом, решения данного уравнения имеют вид

$$x = \frac{y}{e} \quad \text{и} \quad Cx = \ln Cy. \blacktriangleright$$

187. $xy'^3 - yy'^2 + 1 = 0$.

◀ Полагая здесь $y' = p$, разрешаем уравнение относительно x:

$$x = \frac{yp^2 - 1}{p^3} = \frac{y}{p} - \frac{1}{p^3}. \tag{1}$$

Из равенства $dy = p\,dx$, а также (1) следует, что

$$dy = p\,d\left(\frac{y}{p} - \frac{1}{p^3}\right) = dy - \frac{y}{p}\,dp + \frac{3\,dp}{p^3}. \tag{2}$$

Из (2) находим $p = C$ и $y = \frac{3}{p^2}$. Подставив эти значения в (1), получим

$$x = \frac{y}{C} - \frac{1}{C^3} \quad \text{и} \quad 27x^2 = 4y^3. \blacktriangleright$$

188. $y'^2 + 2yy'\operatorname{ctg} x - y^2 = 0$.

◀ Разрешая уравнение относительно y', получаем два дифференциальных уравнения

$$y' = y\operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad \text{и} \quad y' = -y\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

Их соответствующие решения имеют вид

$$y = \frac{C_1}{\cos^2\frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad y = \frac{C_2}{\sin^2\frac{x}{2}}. \blacktriangleright$$

189. $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.

◀ Умножив обе части уравнения на y^2 и обозначив $y^2 = u$, получим

$$4(u - xu')^3 = u'^2.$$

Полагая $u' = p$ и разрешив последнее уравнение относительно u, будем иметь

$$u = xp + \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{1}$$

Поскольку $du = p\,dx$, то, дифференцируя обе части равенства (1), найдем

$$p\,dx = d\left(xp + \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = x\,dp + p\,dx + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}dp, \quad \text{или} \quad \left(x + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)dp = 0.$$